

# CHAPITRE 10 : CIRCUITS LINEAIRES EN REGIME SINUSOÏDAL FORCE

## I. INTRODUCTION

Nous abordons dans cette deuxième partie d'électrocinétique l'étude des circuits entretenus, alimentés par des générateurs fournissant des signaux sinusoïdaux. De tels signaux ont une grande importance en électronique, la plupart des générateurs électriques fournissant une tension sinusoïdale. Nous verrons de plus en deuxième année que l'on peut ramener un signal quelconque à une superposition de signaux sinusoïdaux si les équations concernées sont linéaires (décomposition de Fourier du signal). Le régime de fonctionnement correspondant est qualifié de *forcé* car, comme nous le verrons, le courant dans le circuit ainsi que les tensions aux bornes de ses dipôles, après une certaine période transitoire, varient à la fréquence imposée par le générateur.

Notre étude sera grandement simplifiée en représentant les grandeurs physiques par des nombres complexes. Cette méthode sera utilisée en physique à chaque fois que l'on sait qu'une grandeur évolue de manière sinusoïdale.

## II. GRANDEURS SINUSOÏDALES

### 1) Caractéristiques d'une grandeur sinusoïdale

L'évolution temporelle d'une grandeur  $X(t)$  est sinusoïdale si elle peut s'écrire sous la forme :

$$X(t) = X_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Une telle évolution est représentée graphiquement en figure 10.1.

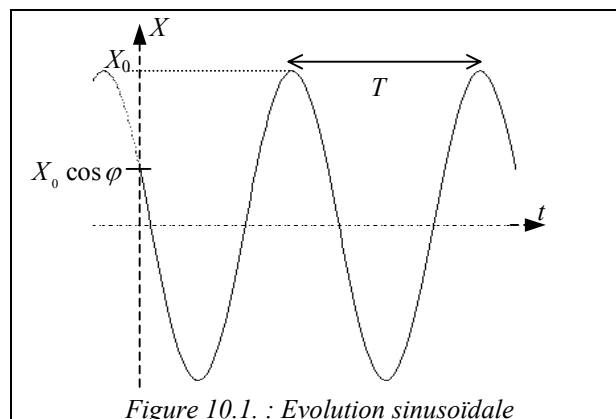


Figure 10.1. : Evolution sinusoïdale

- $X_0$  est l'*amplitude* de la grandeur  $X$  exprimée dans l'unité de  $X$  et positive par convention, i.e.  $X_0$  est la valeur maximale atteinte par  $X$  au cours de son évolution.
- Le terme  $\omega t + \phi$  dans la fonction cosinus est la *phase* de la grandeur  $X$ .
- La constante  $\phi$  est donc la *phase à l'origine* de  $X$ , exprimée en radians, et choisie généralement dans l'intervalle  $]-\pi, \pi]$ .
- $\omega$  est la *pulsation* de la grandeur  $X$ , exprimée en radians par seconde. La pulsation est liée aux *période*  $T$  (exprimée en seconde) et *fréquence*  $f$  (exprimée en Hertz ou  $s^{-1}$ , i.e. en nombre de périodes par seconde) de  $X$  par les relations :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

La phase s'écrit donc en fonction de la période :  $2\pi t/T + \phi$ . Remarquons que la phase à l'origine ne dépend *que* de notre choix de l'origine des temps, qui peut être fait arbitrairement. Elle n'a donc aucune signification physique.

## 2) Différence de phase : déphasage

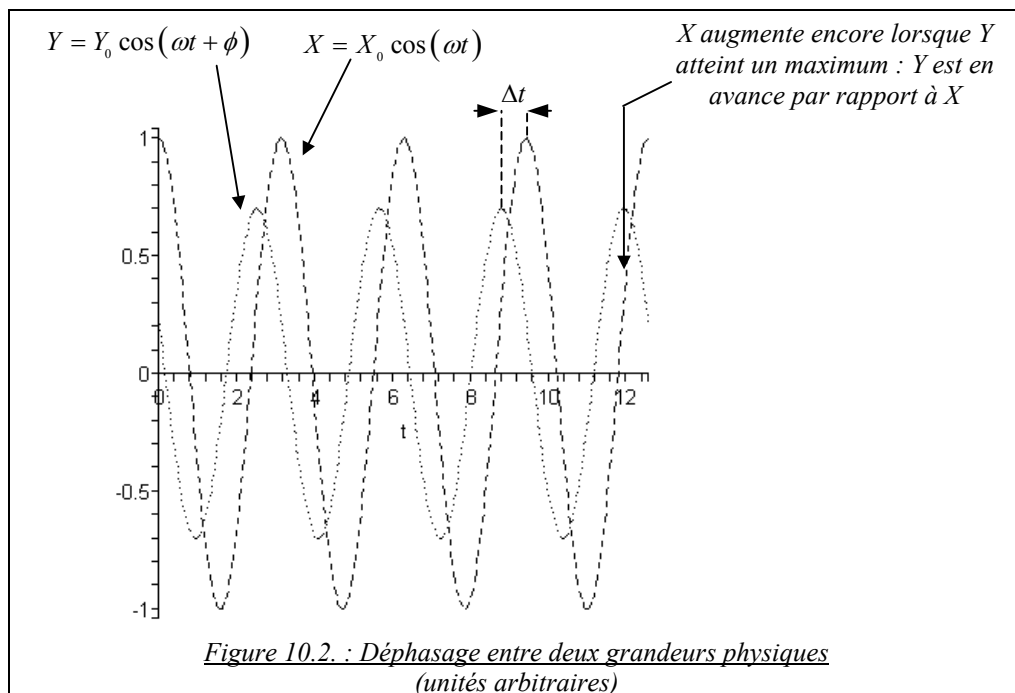
Considérons maintenant deux grandeurs  $X(t)$  et  $Y(t)$  qui évoluent de manière sinusoïdale avec la même pulsation  $\omega$  (ces deux grandeurs sont alors *synchrones*) :

$$\begin{cases} X(t) = X_0 \cos(\omega t + \phi_1) \\ Y(t) = Y_0 \cos(\omega t + \phi_2) \end{cases}$$

Nous avons la liberté de changer arbitrairement l'origine des temps de manière à ce que  $X$  prenne une valeur particulière à cette origine. Faisons le changement de « coordonnée temporelle »  $t' = t - \phi_1/\omega$ , puis renommons  $t'$  en  $t$ . Les expressions ci-dessus deviennent :

$$\begin{cases} X(t) = X_0 \cos(\omega t) \\ Y(t) = Y_0 \cos(\omega t + \phi_2 - \phi_1) = Y_0 \cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

où  $\phi \equiv \phi_2 - \phi_1$  est le *déphasage* de la grandeur  $Y$  par rapport à la grandeur  $X$  (figure 10.2.). La différence de phase entre deux grandeurs physiques a donc une signification physique claire : elle indique le décalage entre les maxima de  $X$  et de  $Y$ .

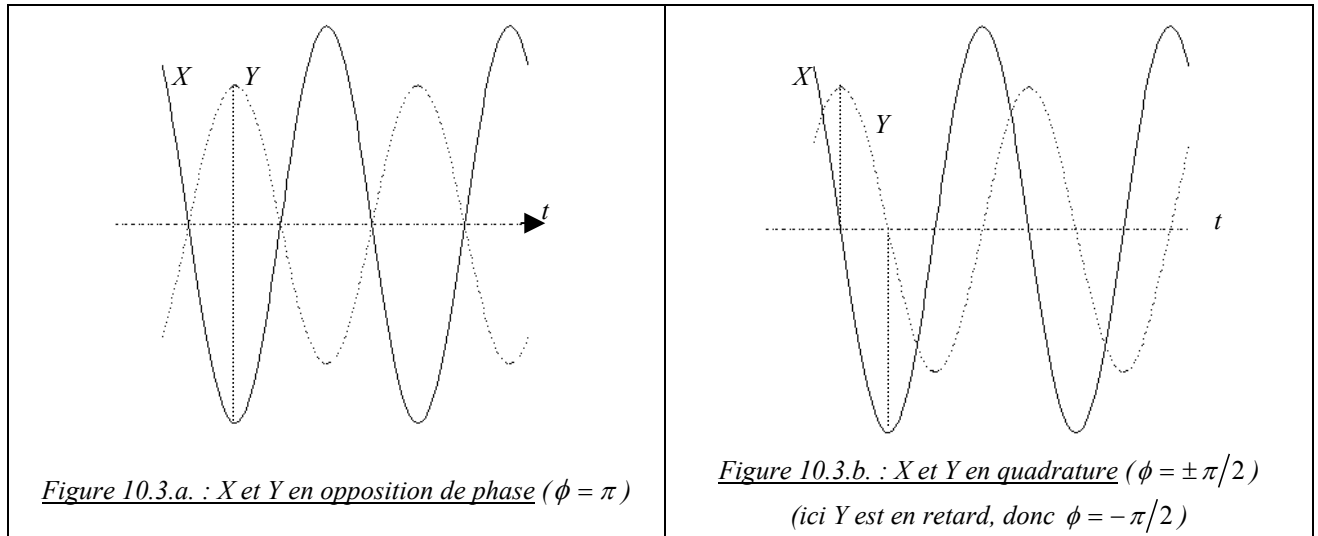


Dans l'exemple de la figure 10.2.,  $Y$  est *en avance* par rapport à  $X$ . En effet, lorsque  $Y$  atteint un maximum ( $Y = Y_0$ , i.e.  $\omega t + \phi = 2\pi$  avec  $n$  entier positif),  $X$  augmente entre  $-X_0$  et  $X_0$  et n'a donc *pas encore* atteint un maximum (i.e.  $-\pi/2 < \omega t < \pi$ ). Le déphasage est donc positif<sup>1</sup>.  $X$  atteindra son maximum avec un retard  $\Delta t$  tel que  $\omega \Delta t = \phi$  donc  $\Delta t = \phi/\omega$ .

Deux situations particulières de déphasage sont représentées en figures 10.3. :

<sup>1</sup> Si on a choisi de l'exprimer dans l'intervalle  $]-\pi, \pi]$ .

- $X$  et  $Y$  sont en *opposition de phase* si à tout instant  $Y = -X$ , donc si  $\phi = \pi$ .
- $X$  et  $Y$  sont en *quadrature* si  $Y = 0$  lorsque  $|X| = X_0$  et inversement, donc si  $\phi = \pm \pi/2$ .

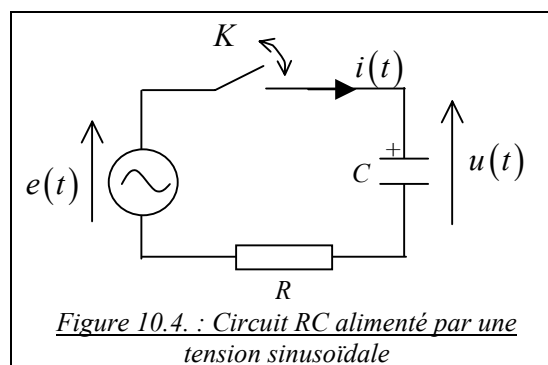


### III. CIRCUIT R,C EN REGIME SINUSOÏDAL

#### 1) Equation différentielle

On s'intéresse au circuit R,C série alimenté par un générateur délivrant une tension sinusoïdale (figure 10.4.) (on a choisi l'origine des temps de manière à annuler la phase à l'origine du terme source  $e(t)$ ) :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$$



On ferme l'interrupteur  $K$  à la date  $t = 0$ . La loi de la maille s'écrit :

$$Ri + u = E_0 \cos(\omega t)$$

On obtient une équation différentielle du premier ordre pour la charge aux bornes du condensateur en utilisant les relations  $i = \dot{q}$  et  $q = Cu$  :

$$\dot{q} + \frac{q}{\tau} = \frac{E_0}{R} \cos(\omega t)$$

où  $\tau \equiv RC$  est la constante de temps du circuit.

#### 2) Régime transitoire

La solution générale de l'équation sans second membre est :  $q = Ae^{-t/\tau}$  (chapitre 6).

Une solution particulière de l'équation avec second membre est :

$$q = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

(solution particulière pour laquelle l'évolution de la charge est sinusoïdale et synchrone avec la tension appliquée par le générateur). La solution générale avec second membre pour la charge est donc :

$$q = Ae^{-t/\tau} + a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

dans laquelle la constante d'intégration  $A$  s'obtient d'après les conditions initiales, et les constantes  $a$  et  $b$  s'obtiennent par identification (nous reviendrons sur ce point plus bas). Comme nous le savons, le régime transitoire durant lequel le terme exponentiel a de l'importance ne dure que pendant quelques  $\tau$ , la constante de temps aussi appelée durée de relaxation étant très brève (voir chapitre 6). Le circuit fonctionne après cela en régime *établi*, ou *forcé*. Nous ne nous intéresserons dans la suite qu'au régime forcé des circuits, dans lequel les conditions initiales ne jouent aucun rôle. Afin de faciliter leur étude, nous consacrerons la prochaine section à l'introduction de la notation complexe.

#### IV. NOTATION COMPLEXE

##### 1) Notation complexe d'une grandeur sinusoïdale

###### a. Rappels sur les nombres complexes

###### $\alpha$ -Ecritures d'un nombre complexe

Les nombres complexes s'obtiennent en introduisant le nombre  $j$  tel que  $j^2 = -1$  et  $\sqrt{j} = -1$  (on utilise en mathématique la lettre  $i$  mais on change ces conventions en électronique pour qu'il n'y ait pas de confusion avec le courant). Rappelons les différentes manières d'écrire un nombre complexe  $z$  :

$\forall z \in \mathbb{C} :$	$z = a + jb = r(\cos \theta + j \sin \theta) = re^{j\theta}$
<i>Partie réelle de <math>z</math></i> $a = \text{Re}(z)$	<i>Partie imaginaire de <math>z</math></i> $b = \text{Im}(z)$
	<i>Module de <math>z</math></i> $r =  z $
	<i>Argument de <math>z</math></i> $\theta = \arg(z)$

où  $a$ ,  $b$ ,  $r$  et  $\theta$  sont réels. Notons au passage l'identité due au mathématicien Leonhard Euler :

$$\cos \theta + j \sin \theta = e^{j\theta}$$

Remarquons qu'il en découle les relations :  $\cos \theta = (e^{j\theta} + e^{-j\theta})/2$  et  $\sin \theta = (e^{j\theta} - e^{-j\theta})/2j$ .

###### $\beta$ -Représentation dans le plan complexe

On peut représenter un nombre complexe par un vecteur  $\mathbf{z}$  dans le *plan complexe*  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  : l'axe des abscisses est l'axe réel et l'axe des ordonnées l'axe imaginaire (figure 10.5.). L'extrémité du vecteur est l'*image* de  $z$  dans le plan complexe.

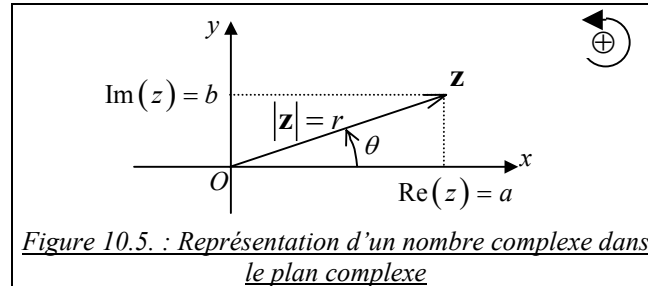
On voit immédiatement sur cette figure les correspondances :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \tan \theta = b/a$$

*Attention* toutefois : la fonction arctangente associée à un nombre réel un nombre compris entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$ , alors que l'argument d'un nombre complexe est compris entre  $-\pi$  et  $\pi$ . La valeur définitive de l'argument se trouve donc avec les signes de  $a$  et  $b$  :

$$\begin{aligned}
 a, b > 0 &\Rightarrow \theta = \arctan(b/a) \\
 a > 0, b < 0 &\Rightarrow \theta = \arctan(b/a) \\
 a < 0, b > 0 &\Rightarrow \theta = \pi - \arctan(b/a) \\
 a, b < 0 &\Rightarrow \theta = -\pi + \arctan(b/a)
 \end{aligned}$$

d'après la figure 10.5.



### $\gamma$ - Nombre complexe conjugué

On appelle *nombre complexe conjugué* de  $z$  le nombre  $z^* = a - jb = re^{-j\theta}$  dont la représentation dans le plan complexe est symétrique de celle de  $z$  par rapport à l'axe des abscisses. Un nombre réel a la propriété  $z = z^*$  et un nombre imaginaire vérifie  $z^* = -z$ . Enfin,  $zz^* = r^2$ .

### b. Utilisation et intérêt des nombres complexes en régime sinusoïdal

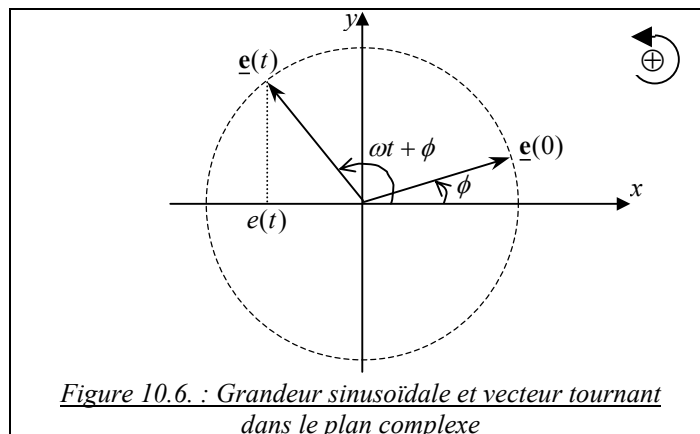
Lorsqu'on étudie une équation différentielle linéaire et qu'on sait que la grandeur physique d'intérêt évolue temporellement comme une fonction sinusoïdale à une fréquence  $\omega$  connue, on étudiera à la place l'équation complexe correspondante. Par exemple, on remplacera la grandeur sinusoïdale « tension délivrée par le générateur » de la section III par la grandeur complexe associée, que l'on soulignera pour la distinguer :

$$e = E_0 \cos(\omega t + \phi) \rightarrow \underline{e} = E_0 e^{j(\omega t + \phi)} = \underline{E}_0 e^{j\omega t}$$

où  $\underline{E}_0 \equiv E_0 e^{j\phi}$  est l'*amplitude complexe* de la tension délivrée par le générateur. L'amplitude et la phase à l'origine de  $e$  peuvent se retrouver par les relations :

$$E_0 = |\underline{E}_0| ; \phi = \arg(\underline{E}_0) \text{ (à } \pi \text{ près, voir remarque du §1.a)}$$

L'évolution de  $\underline{e}$  peut alors se représenter par un vecteur  $\underline{e}$  tournant dans le plan complexe (figure 10.6.), la grandeur réelle correspondante s'en déduisant par projection sur l'axe réel.



Le grand intérêt de la notation complexe est de simplifier notablement les dérivations et les intégrations des grandeurs physiques. En effet, en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle :

$$\dot{\underline{e}} = j\omega \underline{e}, \quad \ddot{\underline{e}} = -\omega^2 \underline{e}; \quad \int \underline{e} dt = \frac{1}{j\omega} \underline{e}$$

Développons la dérivée  $\dot{\underline{e}}$  en notant  $\underline{e} = E_0 [\cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi)]$  :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}} &= j\omega \underline{e} = \omega E_0 [j \cos(\omega t + \phi) - \sin(\omega t + \phi)] \\ &= \omega E_0 [\cos(\omega t + \phi + \pi/2) + j \sin(\omega t + \phi + \pi/2)] = \omega E_0 e^{j(\omega t + \phi + \pi/2)} \end{aligned}$$

où on a utilisé les relations  $\cos \theta = \sin(\theta + \pi/2)$  et  $-\sin \theta = \cos(\theta + \pi/2)$  (qui se voient immédiatement sur un cercle trigonométrique). La dérivée  $\dot{\underline{e}}$  d'une grandeur sinusoïdale  $\underline{e}$  est donc en *quadrature avance* par rapport à  $\underline{e}$  (figure 10.7.).

De même, développons la primitive  $\int \underline{e} dt$  :

$$\begin{aligned} \int \underline{e} dt &= \frac{E_0}{\omega} [-j \cos(\omega t + \phi) + \sin(\omega t + \phi)] \\ &= \frac{E_0}{\omega} [\cos(\omega t + \phi - \pi/2) + j \sin(\omega t + \phi - \pi/2)] = -\frac{E_0}{\omega} e^{j(\omega t + \phi - \pi/2)} \end{aligned}$$

où on a utilisé les relations  $\sin \theta = \cos(\theta - \pi/2)$  et  $-\cos \theta = \sin(\theta - \pi/2)$ . La primitive d'une grandeur sinusoïdale  $\underline{e}$  est donc en *quadrature retard* par rapport à  $\underline{e}$  (figure 10.7.).

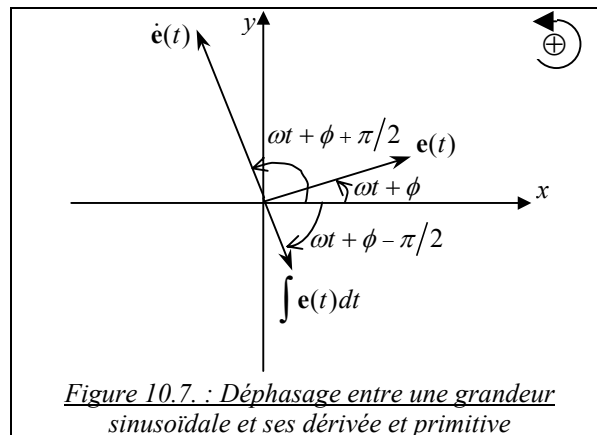


Figure 10.7. : Déphasage entre une grandeur sinusoïdale et ses dérivée et primitive

## 2) Résolution d'équation différentielles en notation complexe

Nous nous intéresserons ici aux régimes sinusoïdaux forcés, i.e. aux équations différentielles linéaires à coefficients constants pilotées par un deuxième membre (un *terme source*) dont l'évolution temporelle est sinusoïdale.

### a. Equation différentielle du premier ordre

Soit l'équation différentielle suivante portant sur la grandeur  $u(t)$  (on a choisi l'origine des temps de manière à annuler la phase à l'origine du terme source) :

$$\dot{u} + au = A_0 \cos(\omega t) \quad \text{avec } A_0 > 0$$

Nous cherchons une solution pour la grandeur  $u$  de la forme :

$$u = u_0 \cos(\omega t + \phi)$$

où  $u_0$  est l'amplitude de  $u$  et  $\phi$  son déphasage par rapport au terme source. Remplaçons les grandeurs physiques par des grandeurs complexes :

$$\dot{\underline{u}} + a\underline{u} = A_0 e^{j\omega t}$$

et injectons une solution sinusoïdale  $\underline{u} = \underline{u}_0 e^{j\omega t}$  :

$$j\omega \underline{u} + a\underline{u} = A_0 e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{u}_0 = \frac{1}{(a + j\omega)} A_0 = \frac{a - j\omega}{(a^2 + \omega^2)} A_0$$

où on a simplifié par  $e^{j\omega t}$  et fait passé  $j$  au numérateur. Faisons apparaître le module et l'argument de l'amplitude complexe solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} |\underline{u}_0| = \sqrt{\operatorname{Re}(\underline{u}_0)^2 + \operatorname{Im}(\underline{u}_0)^2} = \frac{A_0}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \\ \arg(\underline{u}_0) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(\underline{u}_0)}{\operatorname{Re}(\underline{u}_0)}\right) = -\arctan(\omega/a) \end{cases}$$

On obtient les grandeurs physiques réelles par identification :

$$\underline{u}_0 = |\underline{u}_0| = \frac{A_0}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \quad \text{et} \quad \phi = \begin{cases} -\arctan(\omega/a) & (\text{si } a > 0) \\ -\arctan(\omega/a) - \pi & (\text{si } a < 0) \end{cases}$$

la solution réelle du problème est alors :

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t + \phi)$$

### Exemple :

Revenons sur le circuit RC série vue dans la section III. L'équation différentielle

$$\dot{q} + \frac{q}{\tau} = \frac{E_0}{R} \cos(\omega t) \quad \text{devient} \quad \dot{\underline{q}} + \frac{1}{\tau} \underline{q} = \frac{E_0}{R} e^{j\omega t}$$

en notation complexe. En cherchant une solution sinusoïdale du type  $\underline{q} = q_0 e^{j(\omega t + \phi)} = \underline{q}_0 e^{j\omega t}$ , il vient l'équation algébrique :

$$\underline{q}_0 = \frac{\tau E_0 / R}{1 + j\omega\tau} = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \frac{\tau E_0}{R}$$

On en déduit l'amplitude complexe du courant traversant le circuit :

$$\underline{I} = \dot{\underline{q}} \Rightarrow \underline{I}_0 = j\omega \underline{q}_0 = \frac{\omega\tau + j}{1 + \omega^2\tau^2} \frac{\omega\tau E_0}{R}$$

Le module et l'argument de cette amplitude complexe s'écrivent :

$$I_0 = |\underline{I}_0| = \frac{\omega\tau E_0 / R}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \quad \text{et} \quad \phi = \arg(\underline{I}_0) = \arctan\left(\frac{1}{\omega\tau}\right)$$

soit :

$$i(t) = |\underline{I}_0| \cos(\omega t + \arg(\underline{I}_0)) = \frac{\omega\tau E_0 / R}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{1}{\omega\tau}\right)\right)$$

L'obtention des constantes est donc immédiate en notation complexe. Etudions les comportements asymptotiques du courant dans ce circuit (figures 10.8.) :

- Lorsque la fréquence est très faible (i.e.  $\omega\tau \ll 1$ ) :

$$I(t) \approx \frac{\omega\tau E_0}{R} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Le courant traversant le circuit est donc proportionnel à la fréquence et en quadrature avance par rapport à la tension excitatrice. A la limite où  $\omega \rightarrow 0$  (i.e. en régime continu),  $i \rightarrow 0$  : on retrouve bien que le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

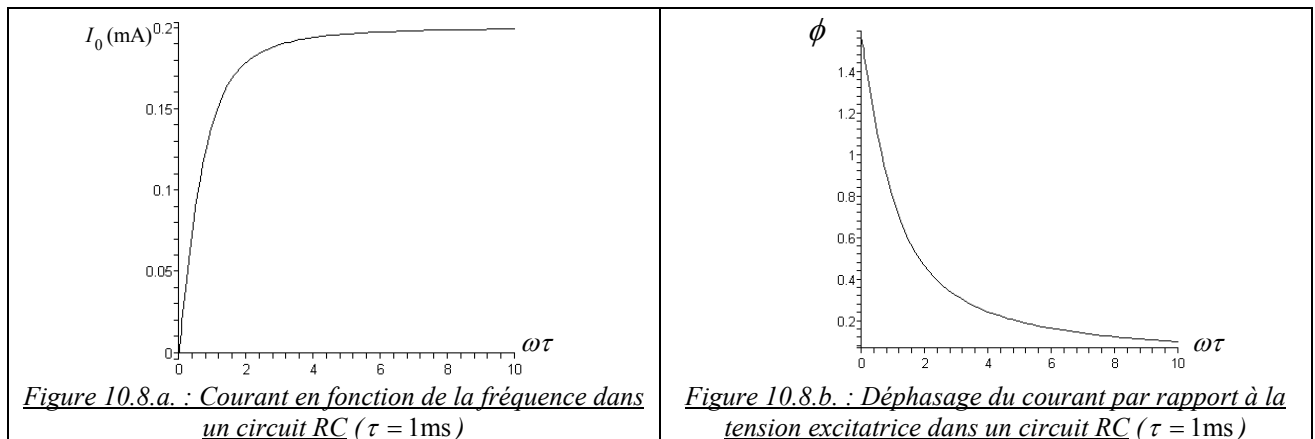
- Lorsque la fréquence est grande (i.e.  $\omega\tau \gg 1$ )<sup>2</sup> :

$$i(t) \approx \frac{E_0}{R} \cos(\omega t)$$

<sup>2</sup> Il faut toutefois vérifier que cette condition est compatible avec l'ARQS, i.e. qu'on peut avoir :  $2\pi c/L \gg \omega \gg 1/\tau$ .

En pratique, la durée de relaxation du circuit est de l'ordre de la milliseconde et  $L/c \sim 10^{-9} \text{ s}^{-1}$ , ce régime existe donc dans un circuit RC.

A haute fréquence, l'amplitude du courant est donc indépendante de la pulsation et en phase par rapport à la tension excitatrice.



### b. Equation différentielle du second ordre

Soit l'équation différentielle suivante portant sur la grandeur  $u(t)$  :

$$\ddot{u} + a\dot{u} + bu = A_0 \cos(\omega t) \quad \text{avec } A_0 > 0$$

Remplaçons les grandeurs physiques par des grandeurs complexes :

$$\ddot{\underline{u}} + a\dot{\underline{u}} + b\underline{u} = A_0 e^{j\omega t}$$

En cherchant des solutions de la forme  $\underline{u} = \underline{u}_0 e^{j\omega t}$ , il vient :

$$\underline{u}_0 = \frac{A_0}{(-\omega^2 + b + j\omega a)} = A_0 \frac{(b - \omega^2 - j\omega a)}{(b - \omega^2)^2 + (\omega a)^2}$$

Le module et l'argument de cette amplitude complexe sont :

$$|\underline{u}_0| = \frac{A_0}{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + (\omega a)^2}} \quad ; \quad \arg(\underline{u}_0) = \arctan\left(\frac{\omega a}{\omega^2 - b}\right)$$

On en déduit les grandeurs physiques d'intérêt :

$$u_0 = |\underline{u}_0| \quad \text{et} \quad \phi = \arg(\underline{u}_0) \quad (\text{à } \pi \text{ près})$$

d'où, finalement :

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t + \phi) .$$

où la phase à l'origine se détermine exactement d'après les signes de  $\omega a$  et  $\omega^2 - b$ .

#### Remarque :

On voit bien dans ces résultats que le circuit « oublie » ses conditions initiales : il n'apparaît aucune constante d'intégration à ajuster. Ce phénomène est caractéristique des oscillateurs entretenus, l'évolution du système est en effet *forcée* par l'évolution du terme source.

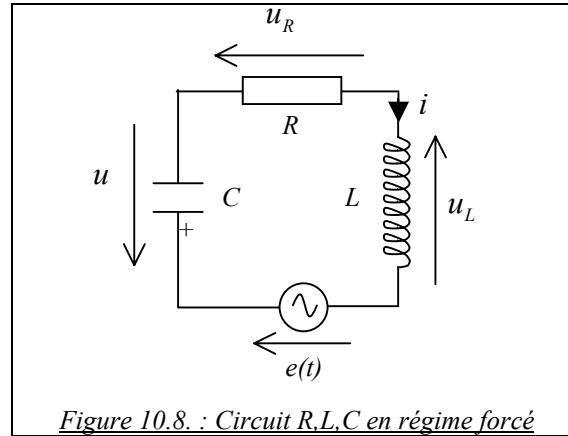
Plusieurs concepts nouveaux s'introduisent naturellement lors de la résolution d'une telle équation différentielle, nous consacrerons donc la prochaine section à l'étude d'un exemple : le circuit R,L,C série en régime forcé.

## V. APPLICATION AU CIRCUIT R,L,C SERIE

### 1) Loi de la maille en notation complexe

On étudie en régime sinusoïdal forcé le circuit R,L,C série de la figure 10.8.





La loi de la maille s'écrit, avec les notations habituelles :

$$Ri + L \frac{di}{dt} + u = E_0 \cos(\omega t)$$

Nous cherchons comme dans le cas du circuit  $R,C$  l'équation différentielle qui régit la charge accumulée sur une armature du condensateur :

$$R\dot{q} + L\ddot{q} + \frac{q}{C} = E_0 \cos(\omega t) \quad \text{soit} \quad \ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{E_0}{L} \cos(\omega t)$$

où on a utilisé les relations  $i = \dot{q}$  et  $q = u/C$  puis posé  $\omega_0 \equiv \sqrt{1/LC}$  la pulsation propre du circuit,  $\tau \equiv L/R$  sa constante de temps liée à la bobine, et  $Q \equiv \omega_0 \tau$  son facteur de qualité (sans dimension). Remarquons l'égalité :

$$Q = \omega_0 \tau = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

Passons maintenant en notation complexe :

$$\ddot{\underline{q}} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\underline{q}} + \omega_0^2 \underline{q} = \frac{E_0}{L} e^{j\omega t}$$

Cherchons une solution sinusoïdale de la forme  $\underline{q} = \underline{q}_0 e^{j\omega t} = q_0 e^{j(\omega t + \phi)}$ . En simplifiant par  $e^{j\omega t}$ , on obtient l'équation algébrique :

$$\underline{q}_0 = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}} \frac{E_0}{L} \Rightarrow \underline{q}_0 = \frac{1}{Q \left( \frac{1}{\chi} - \chi \right) + j \chi \omega_0^2 L} \frac{Q E_0}{\chi \omega_0^2 L}$$

en posant la pulsation réduite  $\chi \equiv \omega/\omega_0$  et en factorisant le dénominateur par  $\chi \omega_0^2 / Q$ . Finalement :

$$\underline{q}_0 = \frac{1}{Q \left( \frac{1}{\chi} - \chi \right) + j \chi \omega_0 R} \frac{E_0}{\chi \omega_0^2 L} = \frac{Q \left( \frac{1}{\chi} - \chi \right) - j}{Q^2 \left( \frac{1}{\chi} - \chi \right)^2 + 1} \frac{E_0}{\chi \omega_0 R}$$

puisque  $Q = \omega_0 \tau$  et  $\tau = L/R$ . On en déduit l'amplitude complexe du courant traversant le circuit :

$$\underline{i} = \dot{\underline{q}} = j\omega \underline{q} \Rightarrow \underline{I}_0 = \frac{1 + Q \left( \frac{1}{\chi} - \chi \right)}{1 + Q^2 \left( \frac{1}{\chi} - \chi \right)^2} \frac{E_0}{R}$$

L'homogénéité du résultat est ici clairement visible.

2) Résonance en couranta. Phénomène de résonance

Les modules et arguments de l'amplitude complexe du courant dans le circuit R,L,C série sont :

$$|\underline{I}_0| = \left[ Q^2 \left( \frac{1}{\chi} - \chi \right)^2 + 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{E_0}{R} ; \quad \arg(\underline{I}_0) = -\arctan \left( Q \left( \frac{1}{\chi} - \chi \right) \right)$$

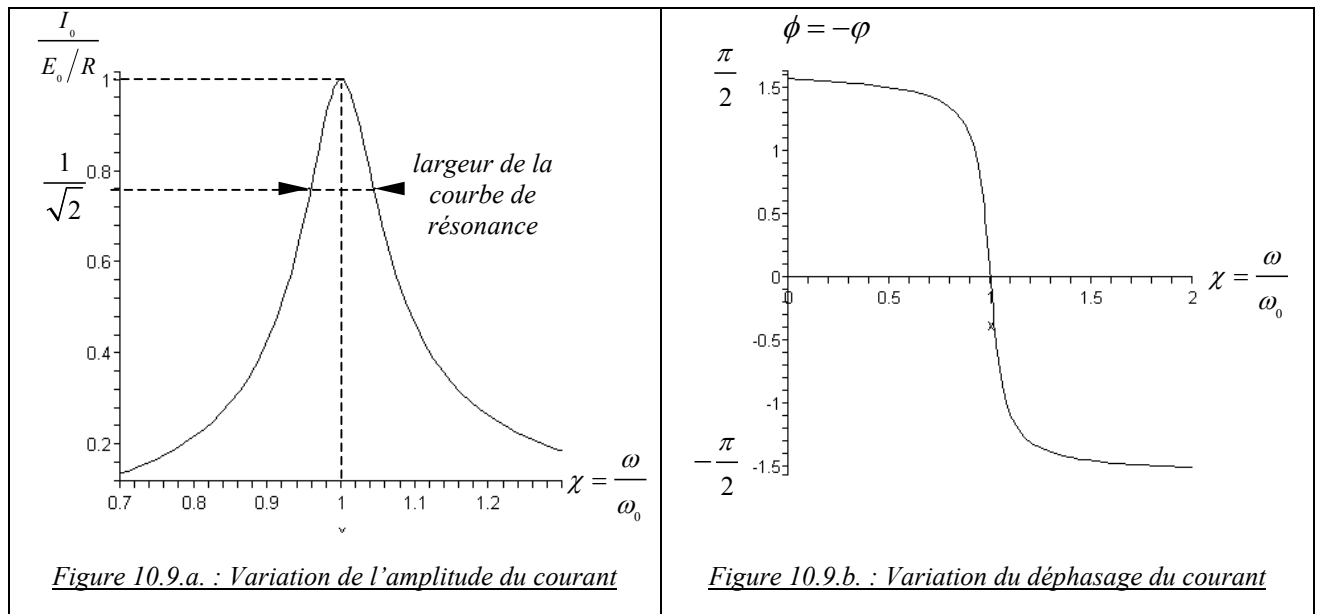
L'amplitude du courant est maximale lorsque :

$$\frac{1}{\chi} - \chi = 0 \Rightarrow \chi = 1 \quad \text{i.e. pour } \boxed{\omega_r = \omega_0}$$

Ce phénomène, lorsqu'une grandeur physique d'un système en régime forcé passe par un maximum lorsque la fréquence d'excitation est égale à une fréquence caractéristique du système, est appelé *résonance* (ici *résonance en courant* du circuit R,L,C série). L'indice  $r$  figurant dans l'expression veut donc dire « à la résonance ». A la résonance, l'amplitude du courant est égale à  $E_0/R$  et le courant est en phase avec la tension excitatrice :

$$i_r(t) = \frac{E_0}{R} \cos(\omega_0 t)$$

Les graphes représentant l'évolution de l'amplitude et du déphasage du courant en fonction de la fréquence de la tension excitatrice sont donnés en figures 10.9. On représente en général par la lettre  $\phi$  la différence entre la phase à l'origine de la tension et celle du courant.

b. Importance de la résonance

On caractérise l'importance de la résonance par la finesse de la courbe  $I_0 = f(\omega)$ , mesurée par convention à l'ordonnée  $I_0 = I_{0r}/\sqrt{2}$ . Calculons cette largeur :

$$I_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{E_0}{R} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{Q^2 \left( \frac{1}{\chi} - \chi \right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\chi} - \chi = \pm \frac{1}{Q} \Rightarrow \chi^2 \pm \frac{\chi}{Q} - 1 = 0$$

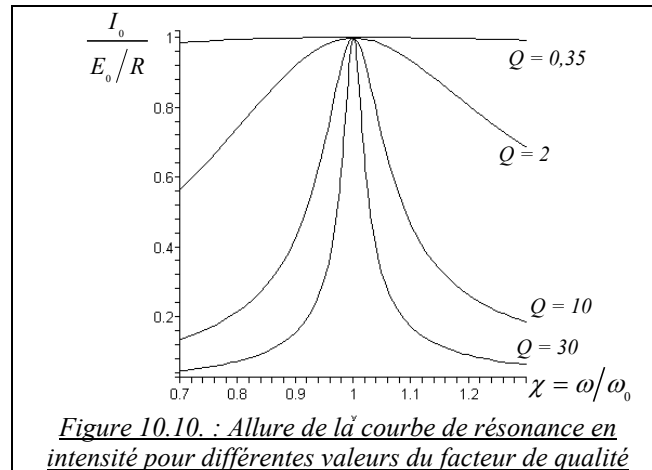
On garde les solutions positives :

$$\chi_1 = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} ; \chi_2 = \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}$$

d'où  $\omega_1 = \omega_0 \chi_1$  ;  $\omega_2 = \omega_0 \chi_2$ . La largeur  $\Delta\omega_{1/2} \equiv \omega_2 - \omega_1$  de la courbe est donc égale à :

$$\Delta\omega_{1/2} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L}$$

La résonance est donc d'autant plus fine (plus sélective en fréquence) que le facteur de qualité  $Q$  du circuit est élevé (figures 10.10.).



### c. Comportement asymptotique

Etudions le comportement asymptotique de l'expression du courant dans les deux cas limites :

- $\omega \ll \omega_0 \Leftrightarrow \chi \ll 1$

On a alors :

$$|I_0| \simeq \frac{\chi}{Q} \frac{E_0}{R} \xrightarrow{\chi \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad \arg(I_0) \simeq \arctan(Q/\chi) \xrightarrow{\chi \rightarrow 0} +\pi/2$$

L'amplitude du courant est donc proportionnelle à la fréquence aux basses fréquences. Elle tend vers zéro aux très basses fréquences (i.e. en régime continu) : on retrouve le rôle d'interrupteur ouvert joué par le condensateur en régime continu.

- $\omega \gg \omega_0 \Leftrightarrow \chi \gg 1$ <sup>3</sup>

On a alors :

$$|I_0| = \frac{1}{Q\chi} \frac{E_0}{R} \xrightarrow{\chi \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad \arg(I_0) = \arctan(-\chi Q) \xrightarrow{\chi \rightarrow \infty} -\pi/2$$

L'amplitude du courant est donc inversement proportionnelle à la fréquence aux hautes fréquences. Elle tend aussi vers zéro aux très hautes fréquences : cela est dû au rôle d'interrupteur ouvert joué par la bobine en régime rapidement variable (résultat que nous démontrerons en deuxième année).

### 3) Résonance en tension aux bornes du condensateur

On obtient facilement l'amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur à partir de l'expression de la charge emmagasinée sur ses armatures :

<sup>3</sup> Il faut toutefois rester dans le domaine de validité de l'ARQS, i.e. avoir  $\omega \ll \frac{2\pi c}{L}$

$$\underline{u} = \frac{q}{C} \Rightarrow \underline{U}_0 = \frac{q_0}{C} = \frac{Q \left( \frac{1}{\chi} - \chi \right)^{-j}}{Q^2 \left( \frac{1}{\chi} - \chi \right)^2 + 1} \frac{1}{\omega_0 \chi} \frac{E_0}{RC} = \frac{Q \left( \frac{1}{\chi} - \chi \right)^{-j}}{Q^2 \left( \frac{1}{\chi} - \chi \right)^2 + 1} \frac{1}{\chi} Q E_0$$

puisque  $Q = \omega_0 \tau = (\omega_0 RC)^{-1}$ . On en déduit :

$$|\underline{U}_0| = \left[ Q^2 (1 - \chi^2)^2 + \chi^2 \right]^{-\frac{1}{2}} Q E_0 \quad ; \quad \arg(\underline{U}_0) = \arctan \left[ -1 / \left( Q \left( \frac{1}{\chi} - \chi \right) \right) \right]$$

Remarquons de plus que  $\text{Re}(\underline{U}_0) > 0$  lorsque  $\chi < 1$ , et  $\text{Re}(\underline{U}_0) < 0$  lorsque  $\chi > 1$ , on a donc :

$$\phi = \begin{cases} \arctan \left[ -1 / \left( Q \left( \frac{1}{\chi} - \chi \right) \right) \right] & (\chi \leq 1) \\ \arctan \left[ -1 / \left( Q \left( \frac{1}{\chi} - \chi \right) \right) \right] - \pi & (\chi \geq 1) \end{cases}$$

Le déphasage entre la tension aux bornes du condensateur et la tension excitatrice varie donc entre 0 et  $-\pi$  lorsque  $\chi$  varie entre 0 et  $+\infty$  : elle est toujours en retard. De plus,  $u$  est en quadrature retard par rapport à  $e$  à la résonance en courant ( $\chi = 1$ ) (figure 10.11.b.). L'amplitude de la tension est alors égale à :

$$U_{0r} = Q E_0 \quad (\omega = \omega_r = \omega_0)$$

A la résonance en courant, l'amplitude de la tension tend donc vers l'infini dans le cas limite  $Q \rightarrow \infty \Leftrightarrow R \rightarrow 0$  (i.e. pas d'amortissement) et en quadrature retard par rapport à la tension excitatrice.

Quant aux comportements asymptotiques, on voit que :

$$\chi \ll 1 \Leftrightarrow \omega \ll \omega_0 : |\underline{U}_0| \approx E_0 \left[ 1 - \left( \frac{1}{2Q^2} - 1 \right) \chi^2 \right] \xrightarrow{\chi \rightarrow 0} E_0$$

$$\chi \gg 1 \Leftrightarrow \omega \gg \omega_0 : |\underline{U}_0| \approx \frac{E_0}{\chi^2} \xrightarrow{\chi \rightarrow \infty} 0$$

à l'ordre le plus faible en  $\chi$ . On retrouve les rôles d'interrupteurs ouvert joués par le condensateur à très basse fréquence et par la bobine à très haute fréquence.

Calculons maintenant la pulsation  $\omega_s$  pour laquelle l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur est extrême :

$$\frac{d}{d\chi} \left[ Q^2 (1 - \chi^2)^2 + \chi^2 \right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\chi} \left[ Q^2 \chi^4 + (1 - 2Q^2) \chi^2 + Q^2 \right] = 0$$

$$\text{soit } \chi^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

ce qui n'est possible que si  $Q > 1/\sqrt{2}$ . On peut de plus vérifier que cet extremum est un maximum de  $|\underline{U}_0|$  en montrant que la dérivée seconde est positive et donc que l'extremum du dénominateur est un minimum. Ainsi, à la condition que  $Q > 1/\sqrt{2}$ , il existe un phénomène de résonance en tension aux bornes du condensateur, ou *surtension* :

$$\omega_s = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (Q > 1/\sqrt{2})$$

$$\text{pas de surtension} \quad (Q < 1/\sqrt{2})$$

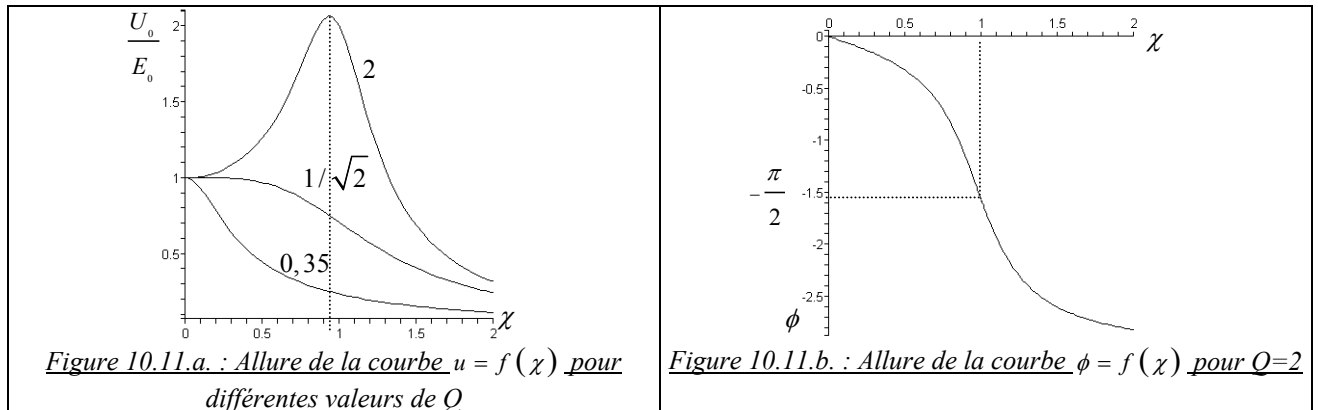
Si la surtension existe, la valeur prise par le module de  $\underline{U}_0$  est :

$$U_{0s} = |U_{0s}| = \frac{QE_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad (\omega = \omega_s)$$

Remarquons de plus que, si le facteur de qualité du circuit est grand :

$$\omega_s \approx \omega_0 \quad \text{et} \quad U_{0s} \approx QE_0$$

La figure 10.11.a. montre l'allure de la courbe  $u = f(\chi)$  pour différentes valeurs du facteur de qualité.



## VI. LOIS DES CIRCUITS LINEAIRES EN REGIME SINUSOÏDAL FORCÉ

### 1) Admittance et impédance complexe d'un dipôle passif

Les relations courant-tension des dipôles passifs obtenues au chapitre 5 sont du type  $i = f(\int u dt, u, \dot{u})$ . Elles se traduisent donc, en régime forcé et en notation complexe, par des relations de *proportionnalité* entre  $i$  et  $u$ . En régime sinusoïdal forcé, on introduit les *admittance complexe*  $\underline{Y}$  (en Siemens  $S$ ) et *impédance complexe*  $\underline{Z}$  (en Ohm  $\Omega$ , ou  $S^{-1}$ ) d'un dipôle passif soumis à une tension ou un courant sinusoïdal de fréquence  $\omega$  :

$$\underline{i} = \underline{Y}\underline{u} \quad \text{et} \quad \underline{u} = \underline{Z}\underline{i} \quad \text{avec} \quad \underline{Z} = 1/\underline{Y}$$

Pour les dipôles R,L,C, les impédance et admittance complexes se déduisent immédiatement des relations courant-tension :

- Résistance

Les relations  $i = Gu$  et  $u = Ri$  deviennent simplement en notation complexe :

$$\underline{i} = G\underline{u} \quad \text{et} \quad \underline{u} = R\underline{i} \quad \text{d'où} : \quad \underline{Z}_R = R \quad \text{et} \quad \underline{Y}_R = G \quad (R = 1/G)$$

Les impédances et admittances d'une résistance sont donc des nombres réels. Le courant et la tension sont en phase dans une résistance.

- Bobine idéale

La relation  $u = L di/dt$  devient en notation complexe :

$$\underline{u} = j\omega L \underline{i} \quad \text{d'où} \quad \underline{Z}_L = j\omega L \quad \text{et} \quad \underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega L}$$

Les impédances et admittances d'une bobine sont donc des nombres imaginaires. Le courant dans une bobine idéale, s'exprimant comme la primitive de la tension, est en quadrature retard par rapport à la tension aux bornes de la bobine.

- Condensateur

La relation  $i = C \dot{u}$  devient en notation complexe :

$$\underline{i} = j\omega C \underline{u} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} \quad \text{et} \quad \underline{Y}_C = j\omega C}$$

Les impédances et admittances d'un condensateurs sont donc aussi des nombres imaginaires. Le courant dans un condensateur, s'exprimant comme la dérivée temporelle de la tension, est en quadrature avancée par rapport à la tension aux bornes du condensateur.

## 2) Lois de Kirchhoff en régime forcé

Les lois de Kirchhoff (i.e. l'ensemble de la lois des nœuds et de la loi des mailles) se généralisent trivialement aux notations complexes :

- Loi des nœuds :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \underline{i}_k = 0}$$

où  $\underline{i}_k$  est l'intensité complexe circulant dans la branche  $k$  et :

- $\varepsilon_k = +1$  si le courant  $\underline{i}_k$  est orienté vers l'intérieur du nœud
- $\varepsilon_k = -1$  si le courant  $\underline{i}_k$  est orienté vers l'extérieur du nœud

- Loi des mailles

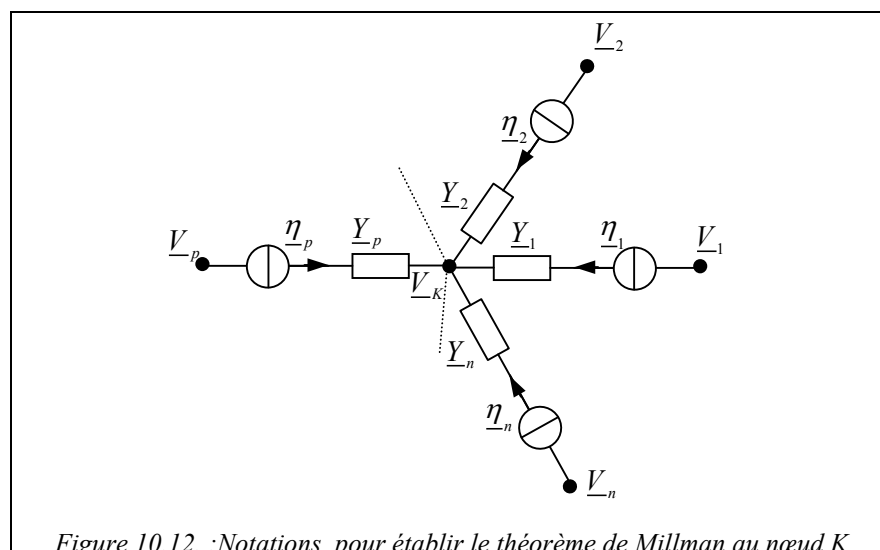
$$\boxed{\sum_{i=1}^m \varepsilon_i \underline{u}_i = 0}$$

où  $\underline{u}_i$  est la tension complexe aux bornes du  $i$ -ème dipôle et :

- $\varepsilon_i = +1$  si la tension  $\underline{u}_i$  est mesurée dans le sens d'orientation de la maille
- $\varepsilon_i = -1$  si la tension  $\underline{u}_i$  est mesurée dans le sens opposé au sens d'orientation de la maille

## 3) Théorème de Millman

Le théorème de Millman est une reformulation de la loi des nœuds en termes de potentiels qui peut s'avérer utile. Considérons la situation de la figure 10.12. : le nœud  $K$ , de potentiel  $\underline{V}_K$  inconnu par rapport à la ligne de masse du circuit, est commun à  $n$  branches, et on oriente tous les courants vers le nœud  $K$ .



On peut alors écrire que la somme des courants arrivant au nœud est nulle (loi des nœuds) :

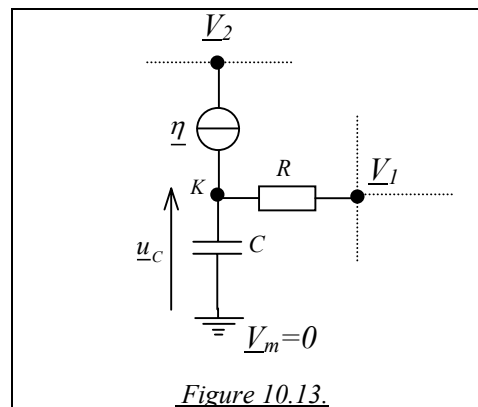
$$\sum_{p=1}^n \underline{i}_k = 0 \Leftrightarrow \sum_{p=1}^n \left( \underline{Y}_p (\underline{V}_p - \underline{V}_K) + \underline{\eta}_p \right) = 0$$

avec  $\underline{V}_p - \underline{V}_K = \underline{u}_p$  la différence de potentiel aux bornes de la branche considérée,  $\underline{Y}_p$  l'admittance de cette branche et  $\underline{\eta}_p$  le courant débité *vers le nœud* par les sources idéales de courant présentes dans cette branche. On en déduit l'expression du potentiel au nœud  $K$  en fonction des potentiels aux extrémités des  $n$  branches :

$$\underline{V}_K = \frac{\sum_{p=1}^n (\underline{Y}_p \underline{V}_p + \underline{\eta}_p)}{\sum_{p=1}^n \underline{Y}_p}$$

Le potentiel au nœud  $K$  s'écrit donc comme le barycentre des potentiels aux  $n$  extrémités des branches affectés d'un « poids » égal à l'admittance de la branche. Notons que l'admittance  $\underline{Y}_p$  de la branche  $p$  doit figurer au dénominateur même si le potentiel  $\underline{V}_p$  est nul.

Exemple :



Considérons la situation de la figure 10.13. En orientant tous les courants vers le nœud  $K$  et en appliquant le théorème de Millman, il vient :

$$\underline{u}_C = \underline{V}_K - \underline{V}_m = \underline{V}_K = \frac{\eta + \underline{Y}_R \underline{V}_1 + 0}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_C} = \frac{\eta + \underline{V}_1 / R}{1/R + j\omega C}$$

Le courant circulant dans le condensateur est alors :

$$\underline{i}_C = \underline{Y}_C \underline{u}_C = j\omega C \times \frac{\eta + \underline{V}_1 / R}{1/R + j\omega C}$$

#### 4) Association de dipôles

##### a. Association en série

Etant donnée la proportionnalité entre les tension et courant complexe aux bornes d'un dipôle passif en régime forcé, leurs association se traitent comme les associations de résistances en vues au chapitre 5. L'additivité des tensions permet d'écrire la tension  $\underline{u}$  aux bornes d'un groupement de  $n$  dipôles en série (figure 10.14.a.) comme :

$$\underline{u} = \sum_{p=1}^n \underline{u}_p = \sum_{p=1}^n \underline{Z}_p \underline{i} = \underline{Z} \underline{i}$$

où  $\underline{Z} \equiv \sum_{i=1}^n \underline{Z}_p$  est l'*impédance équivalente* du groupement de dipôles.

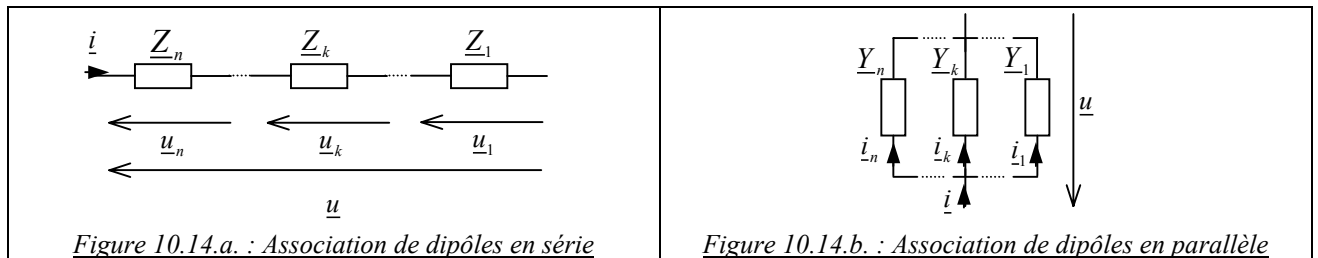
b. Association en parallèle

La loi des nœuds permet d'écrire dans le cas d'un groupement de  $n$  dipôles en parallèle (figure 10.14.b.) :

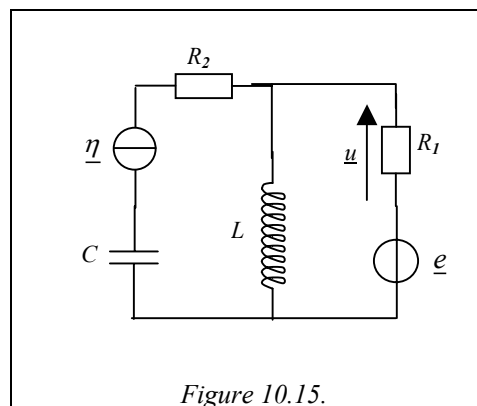
$$\underline{i} = \sum_{p=1}^n \underline{i}_p = \sum_{p=1}^n \underline{Y}_p \underline{u} = \underline{Y} \underline{u}$$

où  $\underline{Y} \equiv \sum_{p=1}^n \underline{Y}_p$  est l'*admittance équivalente* du groupement de dipôles. L'impédance équivalente  $\underline{Z}$  vérifie quant à elle la relation :

$$1/\underline{Z} = \sum_{p=1}^n 1/\underline{Z}_p .$$

5) Théorème de superposition

La somme de deux solutions d'une équation linéaire est encore solution de cette équation. Ainsi, on peut réaliser l'étude d'un circuit linéaire comportant plusieurs générateurs en résolvant tour à tour les équations différentielles correspondant aux différents circuits à *un seul générateur* (les autres étant éteints : court-circuit pour un générateur de tension et interrupteur ouvert pour un générateur de courant).

Exemple :

On considère le circuit de la figure 10.15. , on cherche la tension  $\underline{u}$  aux bornes de la résistance  $R_1$ . D'après le théorème de superposition, elle est la somme des tensions  $\underline{u}_1$  et  $\underline{u}_2$  calculées dans les circuits des figures 10.16.a. et 10.16.b. où l'on a éteint l'un des générateurs :



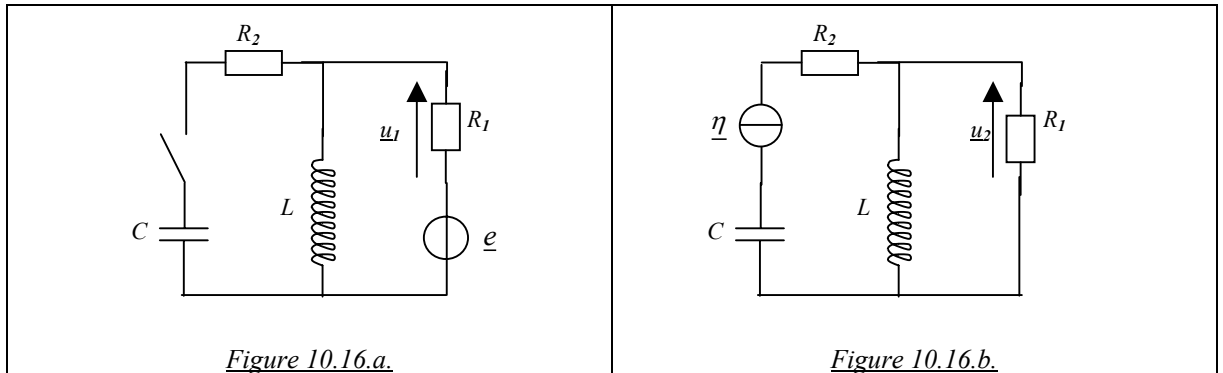


Figure 10.16.a.

Figure 10.16.b.

Dans le cas *a.*, l'impédance équivalente du circuit est :

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega_1 L \Rightarrow \underline{u}_1 = R_1 \underline{i} = R_1 \frac{\underline{e}}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{1 + j\omega_1 L/R_1} \underline{e}$$

où  $\omega_1$  est la pulsation du signal délivré par le générateur de tension. Dans le cas *b.*, l'impédance équivalente de l'association  $R_1/L$  en dérivation est :

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{jL\omega_2}} = \frac{jLR_1\omega_2}{jL\omega_2 + R_1}$$

où  $\omega_2$  est la pulsation du signal délivré par le générateur de courant. La tension aux bornes de ce dipôle équivalent est :

$$\underline{u}_2 = \underline{Z}_2 \underline{\eta} = \frac{jLR_1\omega_2}{jL\omega_2 + R_1} \underline{\eta}$$

La tension mesurée aux bornes de la résistance  $R_1$  s'écrit donc :

$$\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 = \frac{1}{1 + j\omega_1 L/R_1} \underline{e} + \frac{jLR_1\omega_2}{jL\omega_2 + R_1} \underline{\eta}$$