# CHAPITRE 1 : CINEMATIQUE

## I. INTRODUCTION

La mécanique a pour objet l'étude des mouvements, i.e. l'étude des changements spatiaux survenant au cours d'une évolution temporelle.
Nous savons ce qu'est l'espace : il constitue le « volume » dans lequel les objets physiques évoluent. Nous pouvons y mesurer des *longueurs* avec une règle, l'unité de longueur du système international est le mètre.
Nous avons une connaissance intuitive de ce qu'est le temps. Si nous ne pouvons le définir précisément, nous savons du moins qu'il s'écoule invariablement du passé vers le futur et nous lui prêtons un caractère *absolu* : sa vitesse d'écoulement ne varie pas en fonction de la situation de l'expérimentateur. Cette notion ne sera pas remise en question en mécanique newtonienne [1]. Le temps se mesure avec une horloge, i.e. un objet utilisant un phénomène périodique ; l'unité de temps du système international est la seconde. Les résultats que nous établirons dans le cadre de la mécanique newtonienne sont utilisables lorsque les vitesses mises en jeu sont très petites devant la célérité de la lumière $c$ :

$$\boxed{v \ll c} \qquad \text{où } c \simeq 3{,}00.10^{8}\,\text{m.s}^{-1}$$

La cinématique est le domaine de la mécanique lié à la *description* des mouvements. Dans ce chapitre, on étudiera donc le mouvement d'un mobile sans s'intéresser à ses *causes*. On se limitera de plus à considérer le mouvement d'un *point.* Nous éviterons ainsi, lorsque nous parlerons du mouvement physique d'un mobile, les problèmes liés aux *mouvements propres* d'un solide (rotations autour de son centre d'inertie) car nous ne considèrerons que le mouvement du centre d'inertie d'un solide en translation.

## II. TRAJECTOIRE, REFERENTIEL

Nous savons depuis Galilée que « le mouvement est comme rien » : pour nous qui sommes solidaires du mouvement de la Terre, il nous est imperceptible [2]. Avant toute chose, lors de l'étude du mouvement d'un mobile, il faut donc préciser *par rapport à quoi* on étudie ce mouvement. Ce solide de référence est considéré *immobile* pour l'étude.
Assis dans une salle de classe, nous sommes immobiles dans le référentiel terrestre (i.e. si l'on étudie notre mouvement par rapport à la Terre, considérée immobile), alors que nous nous déplaçons d'environ 30 kilomètres chaque seconde si l'on étudie notre mouvement dans le référentiel lié au Soleil, et de plus de 600 kilomètres par seconde si l'on se place dans le référentiel lié au centre de notre galaxie.
La *trajectoire* d'un point est la forme géométrique qu'il parcourt au cours de son mouvement. Elle dépend bien sûr du référentiel choisi, comme le montre l'exemple de la figure 1.1.

## III. OUTILS POUR LA DESCRIPTION DU MOUVEMENT

### 1) Vecteur position

Le cadre mathématique idéal pour décrire un mouvement dans l'espace est la géométrie. Si l'on choisit une *origine* arbitraire $O$ de l'espace, immobile par rapport à l'objet de référence retenu

---

[1] Le caractère absolu du temps est abandonné en relativité.
[2] Comme nous le verrons dans la deuxième partie de l'année, l'expérience du pendule de Foucault permet en fait de mettre en évidence la rotation de la Terre.

(définissant ainsi un *référentiel* $\mathfrak{R}$), ainsi qu'une origine arbitraire des temps, on peut repérer dans $\mathfrak{R}$ la *position* d'un point mobile $P$ à la date $t$ par un vecteur nommé *vecteur position* liant l'origine et le point considéré. Il est noté indifféremment $\mathbf{OP}(t)_{\mathfrak{R}}$ ou $\mathbf{r}(t)_{\mathfrak{R}}$, ou plus simplement $\mathbf{OP}$ ou $\mathbf{r}$ en gardant à l'esprit qu'il dépend de la date et du référentiel (voir figure 1.2.). Sa norme $\|\mathbf{OP}\|$ est la distance séparant les points $O$ et $P$ à la date $t$.

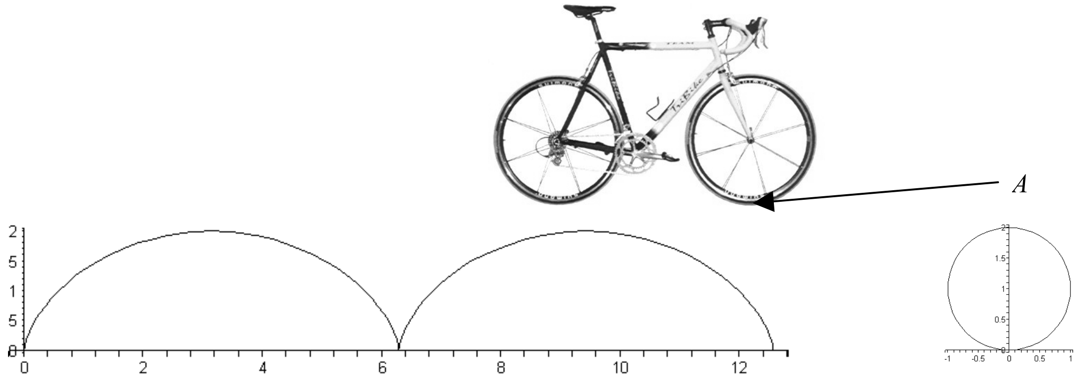



*Figure 1.1 : Trajectoire du point A d'une roue de vélo*
*a. dans le référentiel de la route (cycloïde)*
*b. dans le référentiel lié au cadre du vélo (cercle)*

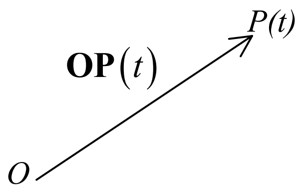



*Figure 1.2. : Vecteur position à la date* t
*(l'origine O est immobile dans le référentiel $\mathfrak{R}$ d'étude)*

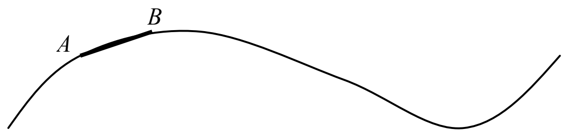



*Figure 1.3. : Approximation d'une petite portion de trajectoire par un segment*

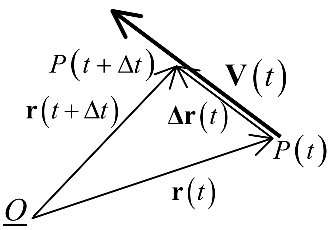



*Figure 1.4. : Vecteur vitesse à la date* t

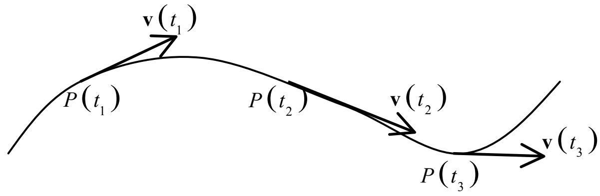



*Figure 1.5. : Vitesse instantanée du point P en différents points de sa trajectoire*

### 2) Vecteur vitesse

#### a. Vecteur vitesse moyenne

La figure 1.3. illustre la trajectoire quelconque d'un point mobile dans un référentiel arbitraire. Remarquons que toute portion de trajectoire suffisamment petite peut être approximée par un segment de droite.
Considérons maintenant deux positions occupées par un point mobile $P$ entre deux dates proches $t$ et $t+\Delta t$ (figure 1.4.). Le vecteur séparant ces deux positions est :

$$\mathbf{\Delta r}(t)_{\mathfrak{R}} \equiv \mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)$$

Si $\Delta t$ est suffisamment petit, la trajectoire empruntée par $P$ entre ces deux positions peut être approximée par une droite et la distance parcourue par $P$ pendant la durée $\Delta t$ est alors $\|\mathbf{\Delta r}(t)\|$. Le vecteur *vitesse moyenne du point P entre $t$ et $t+\Delta t$*, noté $\mathbf{V}(t)$, est défini par la relation :

$$\mathbf{V}(t)_{\Re} \equiv \frac{\mathbf{\Delta r}(t)_{\Re}}{\Delta t}$$

Il a la direction et le sens de $\mathbf{\Delta r}(t)$ (i.e. la direction et le sens du mouvement entre les deux dates), et une norme égale à $\|\mathbf{\Delta r}(t)\|/\Delta t$ exprimée en $m.s^{-1}$ (sa représentation quantitative nécessite donc l'indication sur un schéma d'une échelle des vitesses).

b. Vecteur vitesse

Le *vecteur vitesse*, noté $\mathbf{v}(t)$, est la limite du vecteur vitesse moyenne lorsque $\Delta t$ devient infiniment petit (i.e. tend vers zéro), cette définition coïncide avec celle de la dérivée du vecteur position par rapport au temps :

$$\mathbf{v}(t)_{\Re} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{\Delta r}(t)_{\Re}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)_{\Re} - \mathbf{r}(t)_{\Re}}{\Delta t} \equiv \left( \frac{d\mathbf{r}(t)_{\Re}}{dt} \right) \equiv \dot{\mathbf{r}}_{\Re}$$

Les trois premières égalités sont obtenues en écrivant les définitions de la vitesse moyenne, du vecteur $\mathbf{\Delta r}$ et de la dérivée du vecteur position par rapport au temps. La dernière égalité correspond à l'introduction de la notation « point » pour signifier une dérivée temporelle.

Le vecteur vitesse, colinéaire à $d\mathbf{r}(t)_{\Re}$, est donc tangent à la trajectoire. Il indique quel est le changement, en direction, en sens et en norme, du vecteur position du point $P$ par unité de temps au point considéré de la trajectoire (figure 1.5.). Le calcul du vecteur vitesse instantanée en chaque point nécessite, en plus de la connaissance précise de la trajectoire, la connaissance de la date à laquelle le mobile est passé en chaque point.

Mathématiquement, le passage à la limite ne pose aucun problème. Les lois physiques trouvant dans le calcul différentiel un cadre particulièrement bien adapté, nous nous servirons même abondamment des dérivées. Physiquement, cependant, nous sommes limités par nos instruments de mesure : les mesures sont nécessairement finies (non infinitésimales).

Nous choisirons donc pour une mesure une durée $\Delta t$ la plus petite possible sans introduire trop d'erreur (d'une part, un chronomètre fiable au dixième de seconde introduit 1% d'incertitude sur une mesure de durée de l'ordre de 10s, mais 100% d'incertitude si l'on choisit de mesurer des durée de 0,1s et, d'autre part, une durée faible induit une distance faible et donc une plus grande incertitude de mesure sur la distance). Nous mesurerons donc des vitesses « instantanées » en mesurant des vitesses moyennes avec un intervalle de temps pris le plus petit possible, comme sur la figure 1.4.

Cela se traduit mathématiquement par l'approximation : $\mathbf{v}(t)_{\Re} \simeq \mathbf{V}(t)_{\Re}$ ($\Delta t$ suffisamment petit).

3) *Vecteur accélération*

De la même manière que nous avons défini la vitesse comme la variation du vecteur position par unité de temps en un point de la trajectoire, nous définissons maintenant l'*accélération* du point $P$ à la date $t$ comme la *variation du vecteur vitesse par unité de temps* en ce point de la trajectoire :

$$\mathbf{a}(t)_{\Re} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t)_{\Re} - \mathbf{v}(t)_{\Re}}{\Delta t} \equiv \dot{\mathbf{v}}_{\Re} = \ddot{\mathbf{r}}_{\Re}$$

Il a la direction et le sens de la différence entre les vecteurs vitesse entre les dates $t$ et $t+\Delta t$ et s'exprime en mètres par seconde au carré ($m.s^{-2}$, i.e. en $m.s^{-1}$ *par seconde*). Sa représentation quantitative nécessite l'indication d'une troisième échelle sur un schéma.

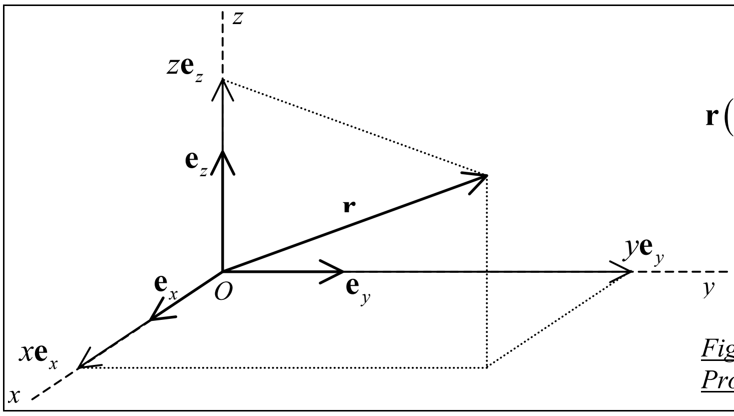
Nous utiliserons les dérivées pour le calcul mais les mesures se feront, comme pour les vitesses, avec des durées petites mais finies.

### 4) *Projection sur une base*

Les vecteurs sont des objets tridimensionnels, or il est souvent plus simple de travailler avec des nombres. Cela est possible si nous *projetons* les vecteurs sur une base, i.e. si nous introduisons un *système de coordonnées*. L'introduction d'une base, si son choix est judicieux, permet bien souvent de simplifier considérablement un problème. En ce début d'année, nous en verrons deux exemples. Dans toute la fin de ce chapitre, nous omettrons l'indice $\Re$.

#### a. Une base fixe : la base cartésienne

La base cartésienne est la base généralement utilisée dans les problèmes au lycée. Elle est formée de trois vecteurs unitaires orthogonaux entre eux $\left(\mathbf{e}_x;\mathbf{e}_y;\mathbf{e}_z\right)$ [3]. Un *repère* cartésien $\Re\left(O,\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z\right)$ est un référentiel que l'on a muni d'origines spatiale et temporelle et d'une base cartésienne. On peut alors décrire un vecteur position à l'aide de ses *coordonnées* $x$, $y$ et $z$ qui sont les projections du vecteur position sur les trois axes (figure 1.6.).




$$\mathbf{r}(t) = \left(\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{e}_x\right)\mathbf{e}_x + \left(\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{e}_y\right)\mathbf{e}_y + \left(\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{e}_z\right)\mathbf{e}_z$$
$$= x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

*Figure 1.6. :*
*Projection du vecteur* **r** *sur la base cartésienne*

Si on connaît les composantes $x$, $y$ et $z$ du vecteur position $\mathbf{r}$ du point mobile en tant que fonction du temps dans la base cartésienne, on peut en déduire sa vitesse et son accélération par dérivations temporelles successives :

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a} = \mathbf{v} = \ddot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

Remarques :

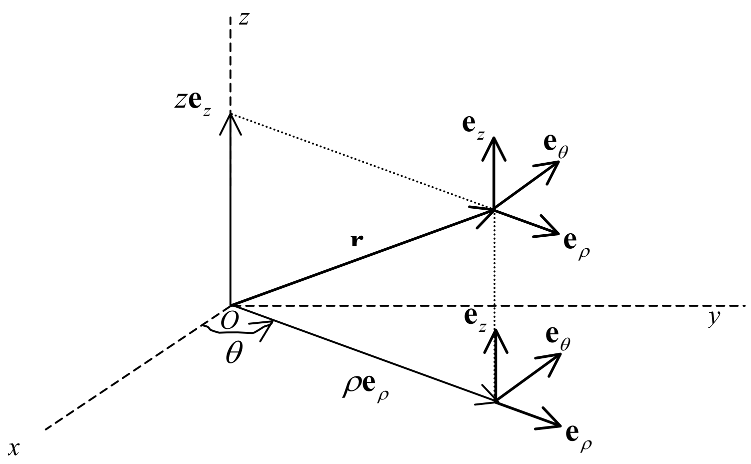
- Les trois axes jouent un rôle strictement équivalent. Cela est une illustration de l'*isotropie* de l'espace : l'espace n'exhibe pas de direction privilégiée.
- Les valeurs numériques des coordonnées des vecteurs **r**, **v** et **a** dépendent de l'orientation de la base, mais ces vecteurs, qui sont des objets géométriques, ont une existence parfaitement définie dans le référentiel sans qu'il soit nécessaire de choisir une base. Cette différence est à garder à l'esprit bien que la notation utilisée ne la reflète pas.

---

[3] cette base défini de plus une *orientation* de l'espace, le trièdre formé par les trois vecteurs est *direct*. Nous reviendrons sur cette notion plus tard dans l'année.

### b. Une base mobile : la base cylindrique

Dans la base cylindrique, les trois coordonnées sont $\rho$, $\theta$ et $z$ (voir figure 1.7.). La base cylindrique est une base mobile, i.e. ses trois vecteurs (toujours unitaires et orthogonaux) se meuvent avec le point étudié.




$$\mathbf{r} = \rho\mathbf{e}_\rho + 0\mathbf{e}_\theta + z\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

*Figure 1.7. : Projection du vecteur* **r** *sur la base cylindrique*

Le vecteur $\mathbf{e}_\theta$ se déduit du vecteur $\mathbf{e}_\rho$ par une rotation de $+\pi/2$ autour de l'axe *Oz*. Les coordonnées cartésiennes des vecteurs de la base cylindrique sont, comme il est aisé de le voir sur le schéma en projetant ces vecteurs sur la base cartésienne :

$$\mathbf{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\pi/2) \\ \sin(\theta+\pi/2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$$

Les équations de passage des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes sont donc :

$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta \qquad z = z$$

et les équations de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques sont :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \arctan(x/y) \qquad z = z$$

Nous verrons dans la prochaine section que cette base est privilégiée dans un problème lorsqu'il existe une symétrie de révolution autour de l'axe *Oz*, i.e. lorsque le problème est *invariant* par une rotation d'un angle $\theta$ suivant cet angle.

L'expression de la vitesse s'obtient par dérivation temporelle ($\mathbf{e}_\rho$ et $\mathbf{e}_\theta$ dépendent du temps) :

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(\rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z) = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{z}\mathbf{e}_z = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\frac{d\mathbf{e}_\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \dot{z}\mathbf{e}_z$$

où nous avons utilisé $d\mathbf{e}_\rho/dr = d\mathbf{e}_\rho/dz = 0$. Or $d\mathbf{e}_\rho = d\theta\mathbf{e}_\theta$ (figure 1.8.). On a donc l'expression de la vitesse dans la base cylindrique :

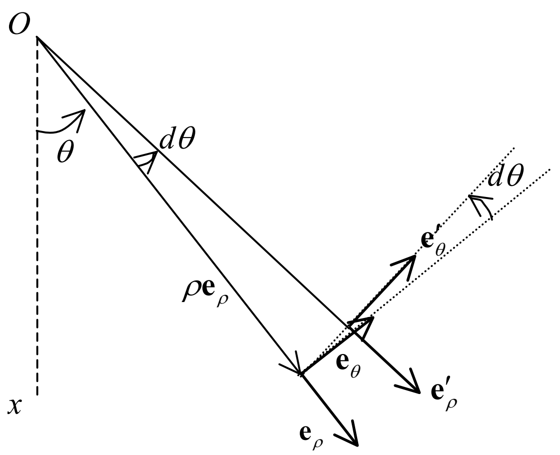
$$\boxed{\mathbf{v} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z}$$

On obtient l'accélération par une nouvelle dérivation :

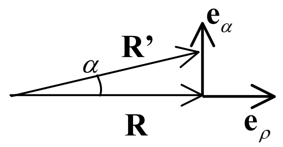
$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z) = \ddot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\mathbf{e}}_\rho + \rho\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{\rho}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \rho\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_z$$

Notons tout d'abord que $d\mathbf{e}_\theta/dr = d\mathbf{e}_\theta/dz = 0$. L'expression ci-dessus se ré-écrit donc :

$$\mathbf{a} = \ddot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\frac{d\mathbf{e}_\rho}{d\theta} + \rho\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{\rho}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \rho\dot{\theta}^2\frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} + \ddot{z}\mathbf{e}_z$$




*Rotation du vecteur* **R** *d'un angle* $\alpha$ *petit* :
*(on identifie le côté du triangle rectangle et l'arc de cercle)*




$$\mathbf{R}' \simeq \mathbf{R} + R\alpha\mathbf{e}_\alpha$$

$$\mathbf{R}' - \mathbf{R} \simeq R\alpha\mathbf{e}_\alpha$$

*Au passage à la limite* $\alpha \to 0$ *, l'approximation devient une égalité.*

$$d\mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}'_\rho - \mathbf{e}_\rho = d\theta \times \mathbf{e}_\theta$$

$$d\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}'_\theta - \mathbf{e}_\theta = -d\theta \times \mathbf{e}_\rho$$

*Figure 1.8. : Variations des vecteurs de la base cylindrique pour une rotation infinitésimale d'angle* $d\theta$ [4]
*(seul le plan z = 0 est représenté)*

De plus, $d\mathbf{e}_\theta = -d\theta\mathbf{e}_\rho$ (figure 1.9.). D'où l'expression de l'accélération dans la base cylindrique :

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_z$$

Remarquons enfin que :

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\theta}\right) = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}$$

Nous retiendrons la formule de l'accélération dans la base cylindrique sous la forme :

$$\boxed{\mathbf{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_z}$$

## IV. ETUDE DE QUELQUES MOUVEMENTS SIMPLES

### 1) *Mouvements rectilignes*

#### a. Cas général

Lorsque la trajectoire d'un mobile est rectiligne, la base de choix la base cartésienne, l'origine et l'orientation des axes étant choisie de telle manière que l'un des axes coïncide avec la trajectoire (figure 1.9.).

[4] Ces expressions peuvent aussi s'obtenir par le calcul en écrivant les expressions de $\mathbf{e}_\rho$ et $\mathbf{e}_\theta$ en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{d\mathbf{e}_\rho}{d\theta} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{d\theta}(\cos\theta) \\ \dfrac{d}{d\theta}(\sin\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_\theta \; ; \; \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{d\theta}(-\sin\theta) \\ \dfrac{d}{d\theta}(\cos\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{e}_\rho$$

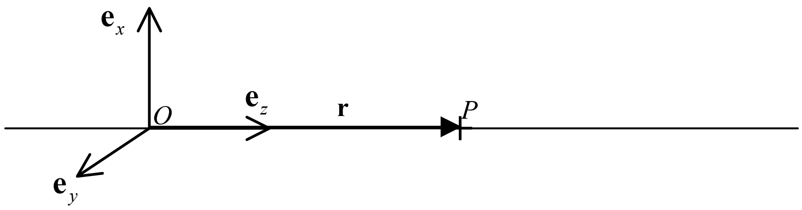



*Figure 1.9. : Mouvement rectiligne du point mobile*
*(la trajectoire peut être bornée ou non)*

Le vecteur position s'écrit alors : $\mathbf{r}(t) = z(t)\mathbf{e}_z$, les coordonnées $x$ et $y$ sont alors constamment nulles au cours du mouvement et l'on est ramené à un problème à une dimension. On obtient la vitesse et l'accélération par dérivation : $\mathbf{v}(t) = \dot{z}(t)\mathbf{e}_z$ ; $\mathbf{a}(t) = \ddot{z}(t)\mathbf{e}_z$. Les vecteurs position, vitesse et accélération sont colinéaires à tout instant.

### b. Mouvement rectiligne uniforme

L'adjectif uniforme signifie que la norme de la vitesse est constante au cours du mouvement. On a donc $\mathbf{v}(t) = \dot{z}(t)\mathbf{e}_z = v_0\mathbf{e}_z \quad (\text{où } v_0 = \text{constante})$ ; $\mathbf{a}(t) = 0$.

### c. Mouvement rectiligne sinusoïdal

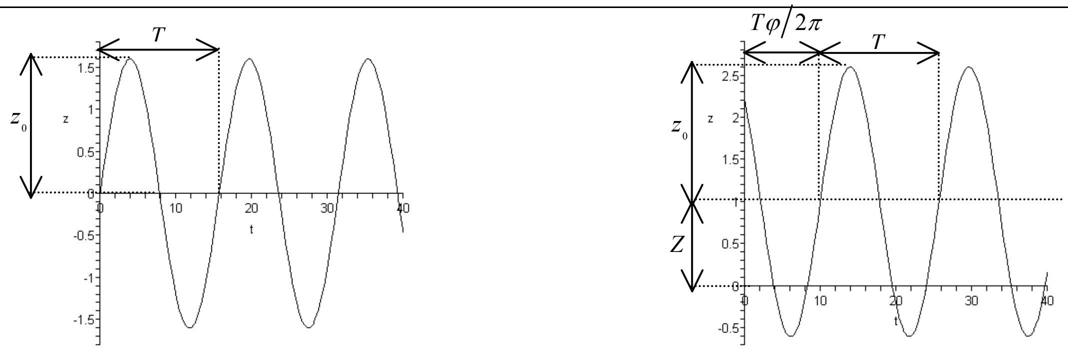
Un mouvement rectiligne sinusoïdal se caractérise par une évolution sinusoïdale de la position au cours du temps. C'est par exemple le mouvement d'une masse accrochée à un ressort si les frottements sont négligeables. La trajectoire du mobile est alors un segment de droite.
On oriente la base de manière à ce que ce mouvement à une dimension se fasse suivant la coordonnée $z$, on place l'origine au milieu de la trajectoire et on choisit l'origine des temps à une date où le mobile est à l'origine. Le mouvement du mobile, i.e. la fonction *z(t)*, est représenté par la figure 1.10.a. Le mouvement est alors simplement mis en équation :

$$z(t) = z_0 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

où $z_0$ est l'*amplitude* du mouvement, i.e. la valeur maximale prise par la coordonnée $z$ au cours du mouvement, et $T$ est la *période* du mouvement, i.e. la durée qui sépare deux maxima consécutifs.
L'argument de la fonction sinus mérite qu'on le regarde d'un peu plus près : le rapport de deux durées assure qu'il est sans dimensions et, à chaque fois que $t$ est un multiple de la période $T$, l'argument du sinus est un multiple de $2\pi$ et $z$ commence un nouveau cycle.
Remarquons enfin que si nous avions choisi comme origine un point $O$ différent du milieu de la trajectoire, il aurait été nécessaire de rajouter une constante $Z$ à la suite de l'équation du mouvement. De même, si nous avions choisi une origine des temps différente, il aurait fallu rajouter un *déphasage* $\varphi$ dans l'argument du sinus (figure 1.10.b). L'équation du mouvement aurait alors été :

$$z(t) = z_0 \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi\right) + Z$$

Replaçons-nous maintenant dans le cas de la figure 1.11.a. où les origines ont été choisies afin de simplifier les expressions. Les projections de la vitesse et de l'accélération du mobile sur l'axe $Oz$ s'obtiennent par dérivation temporelle :



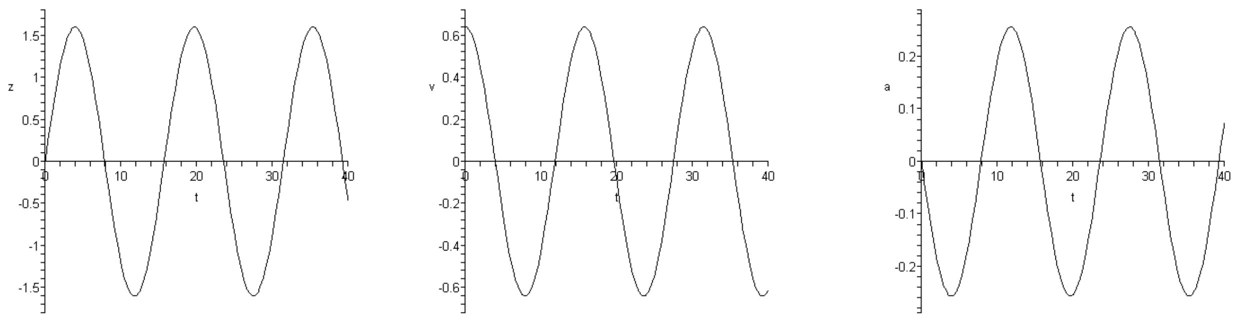

*(a)* *(b)*

*Figure 1.10. : Evolution temporelle sinusoïdale de la coordonnée z du point mobile*
*a. choix judicieux des origines spatiales et temporelles*
*b. choix quelconque des origines*

$$v(t) = \dot{z}(t) = \frac{d}{dt}\left(z_0 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)\right) = \frac{2\pi z_0}{T}\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) = v_0 \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

$$a(t) = \ddot{z}(t) = \dot{v}(t) = \frac{d}{dt}\left(v_0 \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)\right) = -\frac{2\pi v_0}{T}\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) = -a_0 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

avec $v_0 \equiv \dfrac{2\pi z_0}{T}$ et $a_0 \equiv \dfrac{4\pi^2 z_0}{T^2}$ respectivement la vitesse et l'accélération maximales atteintes au cours du mouvement. L'analyse du mouvement est simplifiée si l'on trace graphiquement l'évolution des trois grandeurs (figures 1.11.).
Lorsque le point est au milieu de sa trajectoire, se déplaçant de la gauche vers la droite ($t = 0$), la vitesse est positive de valeur absolue maximale, et l'accélération est nulle. Puis l'accélération devient négative : la dérivée de la vitesse est donc négative et celle-ci diminue. La vitesse s'annule lorsque $z$ atteint sa valeur maximale $z = +z_0$, à $t = T/4$ ; l'accélération est alors négative et sa valeur absolue est maximale. Le lecteur complètera facilement la lecture des graphiques jusqu'à $t = T$ (i.e. jusqu'au commencement d'une nouvelle période identique à la première).



*position* *vitesse* *accélération*

*Figure 1.11. : Evolutions temporelles d'un mouvement rectiligne sinusoïdal*

## 2) *Mouvements circulaires*

### a. Cas général

Nous nous proposons maintenant d'étudier un mouvement circulaire (figure 1.12.) de rayon $R$. La base la plus judicieuse est la base cylindrique, orientée de telle manière que le mouvement circulaire se fasse dans le plan $z = 0$. La coordonnée $z$ est alors constamment nulle et l'on est ramené à un problème à deux dimensions (la base à deux dimensions $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$ ainsi définie est nommée base *polaire*)

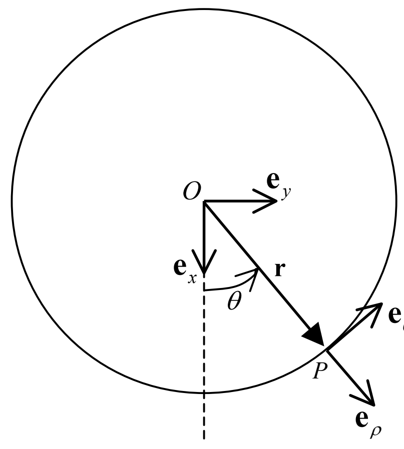



*Figure 1.12. : Mouvement circulaire du point mobile et coordonnées polaires*

La base se déplaçant avec le point mobile, le vecteur position du point $P$ s'écrit simplement :

$$\mathbf{r} = R\mathbf{e}_\rho$$

La vitesse et l'accélération s'en déduisent en faisant $z = 0$ et $\rho = R = \text{cte}$ dans les formules trouvées en III.4.b. :

$$\mathbf{v} = R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{a} = -R\dot{\theta}^2\mathbf{e}_\rho + R\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

La vitesse est donc purement orthoradiale (ce qui est nécessaire pour garder la coordonnée radiale constante).
L'accélération est composée de deux termes :

- Un terme radial dépendant du rayon du cercle et de $\dot{\theta}$ (la variation de l'angle $\theta$ par unité de temps, i.e. la *vitesse angulaire*), dirigé vers de centre du cercle,
- Un terme orthoradial dépendant de $\ddot{\theta}$ (la variation de la vitesse angulaire par unité de temps, i.e. l'*accélération angulaire*).

### b. Cas particulier du mouvement circulaire uniforme

Dans un mouvement circulaire uniforme, le cercle est parcouru à vitesse constante, i.e. la vitesse angulaire est constante : $\ddot{\theta} = 0$ ; $\dot{\theta} = \omega = \text{cte}$. On a alors :

$$\mathbf{v} = R\omega\mathbf{e}_\theta \quad \text{et} \quad \mathbf{a} = -R\omega^2\mathbf{e}_\rho$$

La vitesse est donc purement radiale et sa norme est constante. L'accélération quant à elle n'est pas nulle puisqu'il y a variation de la direction de la vitesse. L'accélération est radiale, dirigée vers le centre du cercle et de norme constante.

Exemple :

En première approximation, le mouvement du centre de masse de la Terre est circulaire uniforme (figure 1.14.). La distance Terre-Soleil, appelée *unité astronomique*, est égale à 150 millions de kilomètres. La période de rotation de la Terre autour du Soleil est de 365,25 jours. On en déduit :

$$\dot{\theta} = \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{365,25 \times 24 \times 3600} = 1,99.10^{-7}\,\text{rad.s}^{-1}$$

$$\|\mathbf{v}\| = R\omega = 2,99.10^4\,\text{m.s}^{-1} \simeq 30\,\text{km.s}^{-1} \;;\; \|\mathbf{a}\| = R\omega^2 = 5,95.10^{-3}\text{m.s}^{-2} \simeq 6,0\,\text{mm.s}^{-2}$$

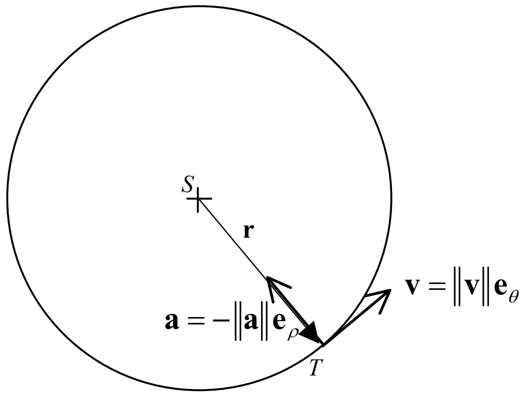



*Figure 1.14. : Mouvement circulaire uniforme du centre de masse de la Terre*

### 3) *Mouvement parabolique*

Un exemple de parabole est la courbe $y = x^2$. Une telle figure géométrique est plane, on peut donc orienter la base cartésienne de manière à fixer $z = 0$ pour toute date $t$ et se ramener à un problème à deux dimensions puis choisir l'origine et orienter $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ de manière à pouvoir décrire la trajectoire par l'équation :

$$y = Ax^2$$

comme le montre la figure 1.15. où $A = 1,3$ (un choix différent d'orientation des axes ou d'origine aurait conduit à une équation plus complexe). L'étude du mouvement doit donc se faire suivant les axes *Ox* et *Oy*. Nous nous limitons au cas intéressant $x(t) = v_0 t$ où $v_0$ est une constante, i.e.

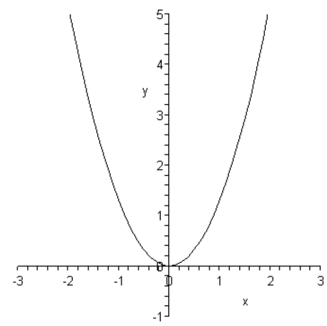



*Figure 1.15. : Trajectoire parabolique dans le plan (x, y)*

$$v_x = \dot{x} = v_0 \text{ et } a_x = \ddot{x} = 0$$

On a alors suivant la direction $y$ :

$$v_y = 2A\dot{x}x = 2Av_0^2 t \quad \text{et} \quad a_y = 2Av_0^2$$

L'accélération est donc constante suivant *y*. Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, un exemple d'un tel mouvement est le mouvement d'un objet que l'on a lancé puis laissé évoluer librement dans le champ de pesanteur.