

CHAPITRE HUIT : ONDES GRAVITATIONNELLES

version 1.1, 1/08

Nous avons jusqu'ici étudié des solutions stationnaires des équations d'Einstein. En particulier, nous ne nous sommes intéressés qu'aux trajectoires de particules tests, i.e. à des géodésiques. Or, l'énergie d'une particule crée une perturbation de la métrique dans son voisinage, et cette perturbation est dynamique si la particule est en mouvement, la métrique dépend alors du temps. Si la perturbation engendrée par la présence de la particule en mouvement est suffisamment faible, on peut considérer qu'elle se propage sur une métrique « de fond » qui, elle, est stationnaire. Nous développerons ce formalisme dans ce chapitre et nous l'appliquerons au cas astrophysique important des systèmes binaires.

I. STRUCTURE DE L'ONDE GRAVITATIONNELLE

1) Linéarisation des équations du champ ; équation d'onde

Nous décomposons donc la métrique en une partie statique et une partie perturbée \mathbf{h} dynamique dont les composantes sont petites, et nous cherchons à linéariser les équations d'Einstein au premier ordre en \mathbf{h} . Dans un souci de simplicité, nous nous restreindrons ici à considérer pour espace-temps statique celui de Minkowski, i.e. les gradients pourront être assimilés à des dérivées partielles. La métrique s'écrit :

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad \text{avec} \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1 \quad (8.1)$$

Les coefficients covariants de la connexion d'une telle métrique sont :

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\gamma\alpha,\beta} - g_{\beta\gamma,\alpha}) = \frac{1}{2}(h_{\alpha\beta,\gamma} + h_{\gamma\alpha,\beta} - h_{\beta\gamma,\alpha}) \quad (8.2)$$

et au premier ordre en la perturbation, les indices s'élèvent à l'aide de la métrique de Minkowski :

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\beta\gamma} \simeq (\eta^{\alpha\mu} - h^{\alpha\mu})\Gamma_{\mu\beta\gamma} \simeq \eta^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\beta\gamma} \quad (8.3)$$

Le tenseur de Riemann s'écrit quant à lui, les termes en $\Gamma\Gamma$ étant du deuxième ordre :

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} \simeq \Gamma_{\alpha\beta\delta,\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta\gamma,\delta} \simeq \frac{1}{2}(h_{\delta\alpha,\beta\gamma} - h_{\beta\delta,\alpha\gamma} - h_{\gamma\alpha,\beta\delta} + h_{\beta\gamma,\alpha\delta}) \quad (8.4)$$

La contraction sur les premier et troisième indices mène au tenseur de Ricci :

$$R_{\alpha\beta} \simeq \eta^{\mu\nu}R_{\mu\alpha\nu\beta} \simeq \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\beta,\mu\nu} - h_{\nu\mu,\alpha\beta} + h_{\alpha\nu,\mu\beta}) = \frac{1}{2}(h^{\mu}_{\beta,\alpha\mu} - h_{\alpha\beta,\mu}{}^{\mu} - h_{,\alpha\beta} + h^{\mu}_{\alpha,\mu\beta}) \quad (8.5)$$

où $h = h^{\mu}_{\mu}$ est la trace de \mathbf{h} et où on reconnaît le laplacien $\square h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta,\mu}{}^{\mu}$. Une nouvelle contraction mène au scalaire de courbure :

$$R = \eta^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} \simeq h^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} - \square h \quad (8.6)$$

d'où le tenseur d'Einstein :

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}R \simeq \frac{1}{2}(h^{\mu}_{\beta,\alpha\mu} - \square h_{\alpha\beta} - h_{,\alpha\beta} + h^{\mu}_{\alpha,\mu\beta} - \eta_{\alpha\beta}h^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} + \eta_{\alpha\beta}\square h) \quad (8.7)$$

Les équations du champ linéarisées sont donc :

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} \Rightarrow h^{\mu}_{\beta,\alpha\mu} - \square h_{\alpha\beta} - h_{,\alpha\beta} + h^{\mu}_{\alpha,\mu\beta} - \eta_{\alpha\beta}h^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} + \eta_{\alpha\beta}\square h \simeq 16\pi T_{\alpha\beta} \quad (8.8)$$

Dans cette équation, seuls les termes d'ordre zéro en \mathbf{h} du tenseur d'énergie-impulsion sont gardés. En effet (8.8) n'est valable qu'en champ faible, et pour que les composantes de h soient faibles, le

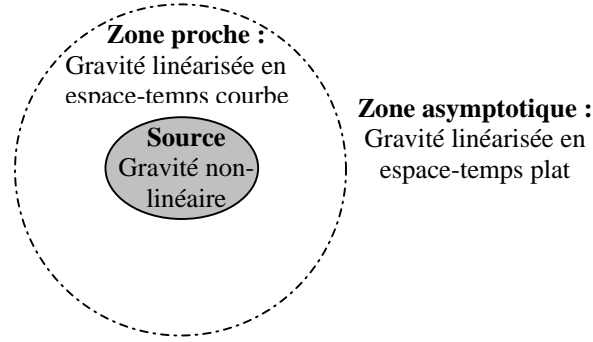


fig. 8.1. : Zone de validité de l'équation (8.12)

système à l'origine de ces perturbations doit lui-même avoir de faibles énergie et impulsion. La solution statique de cette équation a déjà été étudiée au chapitre 5 (expression (5.77)). Nous nous intéressons ici uniquement à la solution dynamique.

Introduisons enfin la *perturbation à trace inversée* :

$$\bar{h}_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h \quad (8.9)$$

qui doit son nom à la propriété $\bar{h} = -h$ (un autre exemple de renversement de la trace est le tenseur d'Einstein, qui n'est autre que le tenseur de Ricci à trace inversée). On a donc aussi :

$$h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{h} \quad (8.10)$$

et les équations du champ linéarisées exprimées en fonction de cette nouvelle grandeur se simplifient légèrement en :

$$-\square\bar{h}_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} + \eta_{\alpha\beta}\eta_{\nu\beta}\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\alpha\mu} + \eta_{\nu\alpha}\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\mu\beta} \approx 16\pi T_{\alpha\beta} \quad (8.11)$$

Dans le vide ($T_{\alpha\beta} = 0$), (8.11) se réduit à :

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} = 0 &\Rightarrow -\square h_{\alpha\beta} - h_{,\alpha\beta} + h^{\mu}{}_{\beta,\alpha\mu} + h^{\mu}{}_{\alpha,\mu\beta} = 0 \\ &\Leftrightarrow -\square\bar{h}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\square\bar{h} + \bar{h}^{\mu}{}_{\beta,\alpha\mu} + \bar{h}^{\mu}{}_{\alpha,\mu\beta} = 0 \end{aligned} \quad (8.12)$$

Cette expression est plus générale que (8.11) car ici la source ayant généré la perturbation n'est pas restreinte par la faiblesse des composantes de son tenseur énergie-impulsion, du moment qu'elle est suffisamment éloignée de la position à laquelle on veut évaluer \mathbf{h} . (fig. 8.1.). Dans la source dynamique et dans son voisinage immédiat (région grisée de la figure), les équations du champ d'Einstein doivent être résolues analytiquement ou numériquement dans toute la complexité de leur non-linéarité. Puis en s'éloignant, on peut traiter la dynamique de la métrique comme une perturbation d'une métrique de fond statique $\mathbf{g}^{(0)}$, il faut alors modifier les résultats précédents en remplaçant la métrique de Minkowski η par $\mathbf{g}^{(0)}$. Enfin, si l'on s'éloigne suffisamment de la source pour atteindre sa région asymptotique, (8.12) devient suffisante pour traiter le problème de la propagation de la perturbation de la métrique.

2) Invariance de jauge, jauge de Lorenz

En électromagnétisme, le tenseur du champ \mathbf{F} dérive du potentiel vecteur \vec{A} :

$$F_{\alpha\beta} = A_{\beta;\alpha} - A_{\alpha;\beta} \quad (8.13)$$

Si on fait le changement

$$A_{\alpha} \rightarrow A'_{\alpha} = A_{\alpha} + \psi_{,\alpha} \quad (8.14)$$

où ψ est un champ scalaire, le tenseur du champ est inchangé puisque le gradient d'un champ scalaire est égale à sa dérivée partielle et que les dérivées partielles commutent :

$$F'_{\alpha\beta} = A'_{\beta,\alpha} - A'_{\alpha,\beta} = A_{\beta,\alpha} + \psi_{,\alpha\beta} - A_{\alpha,\beta} - \psi_{,\beta\alpha} = F_{\alpha\beta}$$

(voir le chapitre 3). Le changement (8.14) est appelé un changement de jauge, et l'expression des composantes de \vec{A} dépend de la jauge choisie alors que le tenseur du champ et donc \mathbf{E} et \mathbf{B} n'en dépendent pas. On doit alors choisir une jauge spécifique, par exemple la jauge de Lorenz lorsqu'on veut étudier le rayonnement :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \Leftrightarrow A^{\mu}_{;\mu} = 0$$

L'équation d'onde de l'électromagnétisme devient dans cette jauge, en espace-temps plat :

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = 4\pi J^{\mu} \Rightarrow -\square \vec{A} = 4\pi \vec{J}$$

Si l'espace-temps est courbe, un couplage apparaît entre le potentiel vecteur et le tenseur de Riemann (voir équation (5.62)).

Par analogie entre (8.13) et (8.4), le tenseur de Riemann dérivant de la perturbation \mathbf{h} , on voit que \mathbf{h} est un potentiel tensoriel et doit donc exhiber une dépendance de jauge. Il est évident que, si on effectue un changement du système de coordonnées tout en respectant la condition (8.1), l'expression de \mathbf{h} sera différente : il faut donc pouvoir distinguer l'information physique contenue dans \mathbf{h} de ce qui n'est du qu'à un choix arbitraire du système de coordonnées. Effectuons le changement de coordonnées :

$$x^{\alpha} \rightarrow x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x^{\mu}) \quad (8.15)$$

où ξ^{α} est un champ vectoriel. On a alors :

$$\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} = \delta^{\alpha}_{\mu} + \xi^{\alpha}_{;\mu} \Rightarrow \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} = \delta^{\alpha}_{\mu} - \xi^{\alpha}_{;\mu} \quad (8.16)$$

au premier ordre en $\xi^{\alpha}_{;\mu}$. La nouvelle métrique s'exprime donc d'après la loi de transformation des tenseurs :

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} g_{\mu\nu} = (\delta^{\mu}_{\alpha} - \xi^{\mu}_{;\alpha})(\delta^{\nu}_{\beta} - \xi^{\nu}_{;\beta})(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) = \eta_{\alpha\beta} - \xi_{\beta,\alpha} - \xi_{\alpha,\beta} + h_{\alpha\beta}$$

d'où :

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \xi_{\beta,\alpha} - \xi_{\alpha,\beta} \quad (8.17)$$

Le changement de coordonnées(8.15) correspond bien à un changement de jauge puisque le tenseur de courbure généré par la nouvelle métrique est inchangé :

$$R'_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (h'_{\delta\alpha,\beta\gamma} - h'_{\beta\delta,\alpha\gamma} - h'_{\gamma\alpha,\beta\delta} + h'_{\beta\gamma,\alpha\delta}) = \frac{1}{2} (h_{\delta\alpha,\beta\gamma} - h_{\beta\delta,\alpha\gamma} - h_{\gamma\alpha,\beta\delta} + h_{\beta\gamma,\alpha\delta}) = R_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Par analogie avec l'électromagnétisme, on appellera « jauge de Lorenz » la jauge dans laquelle :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{h}} = 0 \Leftrightarrow \bar{h}^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0 \quad (8.18)$$

Les équations du champ (8.11) prennent alors, en jauge de Lorenz et en espace-temps plat, la forme très simple :

$$-\square \bar{h}_{\alpha\beta} = 16\pi T_{\alpha\beta} \quad (8.19)$$

i.e. elles se réduisent à l'équation d'onde classique.

3) Jauge transverse sans trace

Nous n'avons pas épuisé toute la liberté de jauge en imposant la jauge de Lorenz (8.18), puisqu'on peut passer d'une jauge de Lorenz à une autre avec un changement de coordonnées (8.15) tant que

$$\square \vec{\xi} = 0 \quad (8.20)$$

Afin de préciser les idées, considérons une onde plane se propageant suivant z , que nous savons être solution de l'équation d'onde dans le vide $\square \bar{h}_{\alpha\beta} = 0$ lorsque le rayon de courbure du front d'onde est grand devant la longueur d'onde :

$$r \gg \lambda \quad (8.21)$$

On a alors $\bar{h}_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta}(z-t)$, d'où

$$\partial/\partial z = -\partial/\partial t \Rightarrow \bar{h}_{\alpha\beta,z} = -\bar{h}_{\alpha\beta,t} \text{ et } \xi_{\alpha,z} = -\xi_{\alpha,t} \quad (8.22)$$

La condition de jauge de Lorenz devient :

$$(\bar{h}_{\mu t} - \bar{h}_{\mu z})^t = 0 \Rightarrow \bar{h}_{\mu t} = \bar{h}_{\mu z} (+cte) \quad (8.23)$$

La constante n'ayant aucune importance physique puisque le tenseur de courbure est construit à partir des dérivées de la métrique. Dans une jauge de Lorenz quelconque, les dix degrés de liberté de la métrique symétrique se réduisent donc à 6. Nous pouvons encore choisir le générateur du changement de coordonnées $\bar{\xi}$ tant qu'il vérifie la condition (8.20) : la perturbation de la métrique n'a donc que deux degrés de libertés, et nous pouvons nous arranger pour que l'onde gravitationnelle $\bar{h}_{\mu\nu}$ soit *transverse et sans trace* (cette jauge de Lorenz spéciale est appelée jauge transverse sans trace et notée TT). En effet, d'après (8.17), lors du changement de coordonnées :

$$\bar{h}'_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} + \eta_{\alpha\beta} \xi_{\mu}{}^{,\mu} \quad (8.24)$$

On peut donc fixer :

$$\begin{cases} \bar{h}'_{tt} = 0 \Rightarrow \bar{h}_{tt} - 2\xi_{t,t} + \eta_{tt}(\xi_t{}^{,t} + \xi_z{}^{,z}) = 0 \Rightarrow \xi_t + \xi_z = \int_0^t \bar{h}_{tt} dt \\ \bar{h}'_{tx} = 0 \Rightarrow \bar{h}_{tx} - \xi_{x,t} = 0 \Rightarrow \xi_x = \int_0^t \bar{h}_{tx} dt \\ \bar{h}'_{ty} = 0 \Rightarrow \bar{h}_{ty} - \xi_{y,t} = 0 \Rightarrow \xi_y = \int_0^t \bar{h}_{ty} dt \end{cases} \quad (8.25)$$

Comme d'après (8.23) : $\bar{h}_{tt} = \bar{h}_{tz} = \bar{h}_{zz}$; $\bar{h}_{xt} = \bar{h}_{xz}$; $\bar{h}_{yt} = \bar{h}_{yz}$, choisir la jauge de Lorenz (8.25) garantit donc la transversalité de la métrique ($\bar{h}'_{t\alpha} = \bar{h}'_{z\alpha} = 0$). Nous avons encore la possibilité d'imposer une condition sur ξ_t et ξ_z . La trace de la métrique sera nulle si :

$$\begin{aligned} \bar{h}'_{xx} + \bar{h}'_{yy} = 0 &\Rightarrow \bar{h}_{xx} + \bar{h}_{yy} + \eta_{xx}(\xi_t{}^{,t} + \xi_z{}^{,z}) + \eta_{yy}(\xi_t{}^{,t} + \xi_z{}^{,z}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \xi_t - \xi_z = \frac{1}{2} \int_0^t (\bar{h}_{xx} + \bar{h}_{yy}) dt \end{aligned} \quad (8.26)$$

Nous avons maintenant épuisé toute notre liberté de jauge et les deux degrés de liberté restants dans la perturbation de la métrique ont une interprétation physique. Dans la jauge transverse sans trace, \mathbf{h} s'écrit :

$$\mathbf{h}^{\text{TT}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_{\times} & 0 \\ 0 & h_{\times} & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.27)$$

avec

$$\begin{cases} h_+ \equiv \bar{h}'_{xx} = \bar{h}_{xx} - \frac{1}{2}(\xi_{t,t} - \xi_{z,t}) = \bar{h}_{xx} - \frac{1}{2}(\bar{h}_{xx} + \bar{h}_{yy}) = \frac{1}{2}(\bar{h}_{xx} - \bar{h}_{yy}) = \frac{1}{2}(h_{xx} - h_{yy}) \\ h_{\times} \equiv \bar{h}'_{xy} = \bar{h}_{xy} = h_{xy} \end{cases} \quad (8.28)$$

(il n'y a plus de différence à faire entre \mathbf{h} et $\bar{\mathbf{h}}$ en jauge TT puisque la trace y est nulle). La méthode pour passer en jauge TT (*projection TT*) lorsqu'on connaît la perturbation \mathbf{h} en jauge de Lorenz est donc simple : il suffit de garder la partie transverse et d'annuler la partie longitudinale (en posant simplement $h_{t\alpha} = h_{z\alpha} = 0$), puis de supprimer la trace de la métrique avec (8.28).

4) *Effet d'une onde gravitationnelle sur des particules tests*

Maintenant que nous nous sommes débarrassé de la liberté de jauge, nous pouvons revenir à la physique et s'intéresser à l'effet d'une onde gravitationnelle sur la matière. On considère ici une assemblée de particules tests initialement au repos relatif, et on cherche à exprimer le déplacement relatif des particules au passage d'une onde gravitationnelle. Pour ce faire, on se place dans le référentiel inertiel local de l'une des particules et on étudie le déplacement relatif d'une autre particule initialement positionnée en $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

L'équation du mouvement s'écrit (équation (1.51)) :

$$\delta r^i{}_{,tt} = -R^i{}_{ijt} r^j \quad (8.29)$$

avec $\delta r^i = r^i - r_0^i$. Si la correction à l'espace-temps plat due à l'onde gravitationnelle est faible, on peut négliger au premier ordre les corrections apparaissant dans r^j et écrire :

$$\delta r^i{}_{,tt} = -R^i{}_{ijt} r_0^j \quad (8.30)$$

Les composantes non nulles du tenseur de courbure en jauge TT, pour une onde gravitationnelle se propageant suivant z , se calculent à partir de (8.4) et (8.27) :

$$R^x{}_{txt} = -R^y{}_{tyt} = -\frac{1}{2}h_{+,tt} \quad R^x{}_{tyt} = R^y{}_{txt} = -\frac{1}{2}h_{\times,tt}$$

Il vient donc avec (8.29) :

$$\delta x_{,tt} = \frac{1}{2}h_{+,tt}x_0 + \frac{1}{2}h_{\times,tt}y_0 \quad \delta y_{,tt} = -\frac{1}{2}h_{+,tt}y_0 + \frac{1}{2}h_{\times,tt}x_0 \quad \delta z_{,tt} = 0 \quad (8.31)$$

Et, par une intégration triviale :

$$\delta x = \frac{1}{2}h_+x_0 + \frac{1}{2}h_\times y_0 \quad \delta y = -\frac{1}{2}h_+y_0 + \frac{1}{2}h_\times x_0 \quad \delta z = 0 \quad (8.32)$$

Étudions séparément les effets des deux composantes de la perturbation de la métrique. Si seule h_+ est non nulle, on obtient :

$$\delta x = \frac{1}{2}h_+x_0 \quad \delta y = -\frac{1}{2}h_+y_0 \quad \delta z = 0 \quad (8.33)$$

Pour une composante h_+ positive, les particules tests s'éloignent donc de l'origine suivant x et s'en rapprochent suivant y . Les lignes de champ sont quadrupolaires (voir figure 8.2.) et les déplacements sont radiaux sur les axes. Si seule h_\times est non nulle, (8.32) devient :

$$\delta x = \frac{1}{2}h_\times y_0 \quad \delta y = \frac{1}{2}h_\times x_0 \quad \delta z = 0 \quad (8.34)$$

Pour une composante h_\times positive, le déplacement en x (respectivement en y) est d'autant plus important que y_0 (respectivement x_0) est grand, les déplacements sont radiaux sur les deux bissectrices (figure 8.3.). Les dénominations h_+ et h_\times devraient apparaître clairement sur les figures. Le déplacement général (8.32) est une combinaison linéaire des deux *polarisations* « + » et « × » de l'onde gravitationnelle.

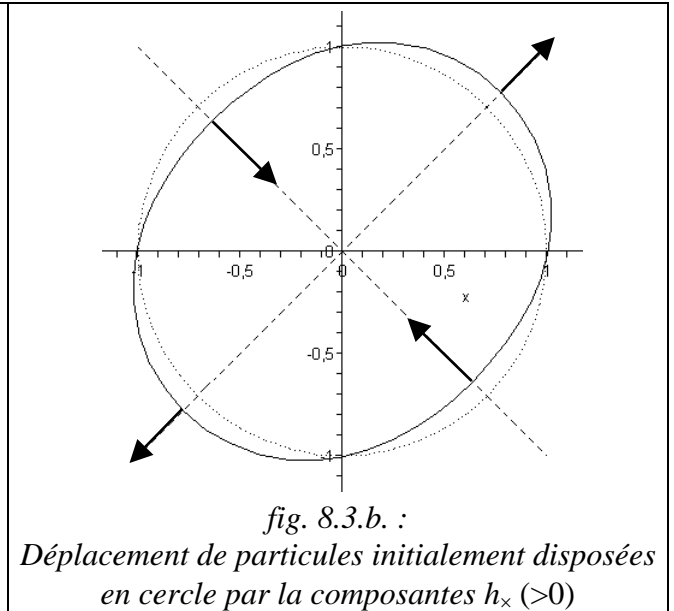
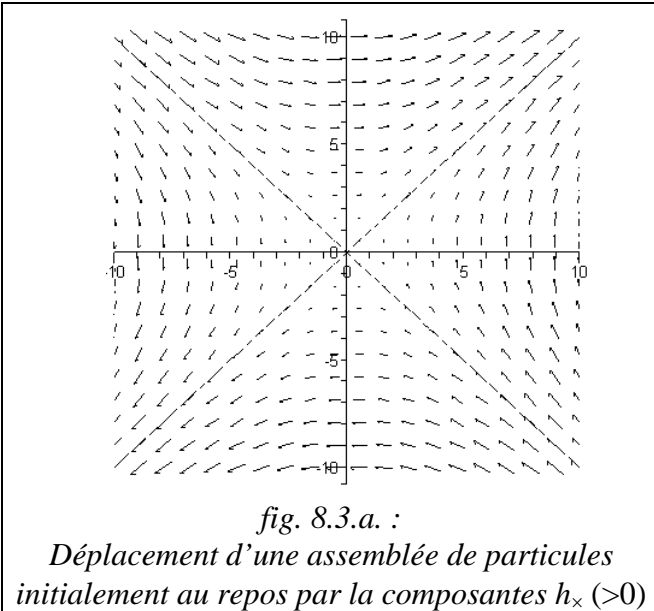
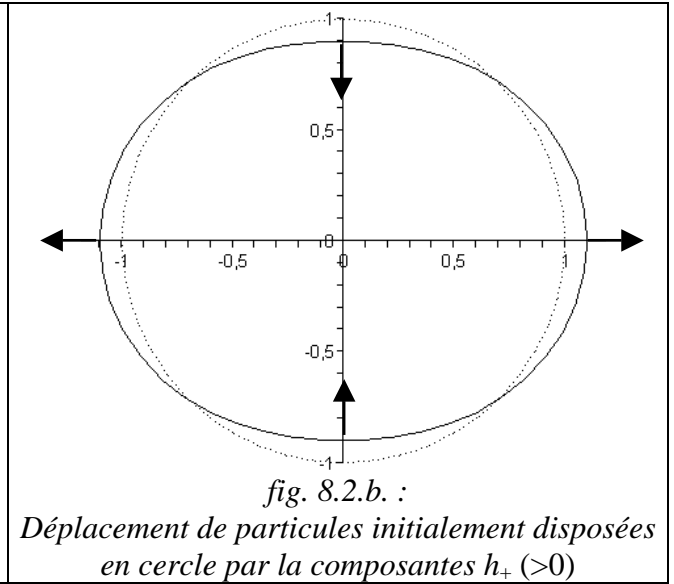
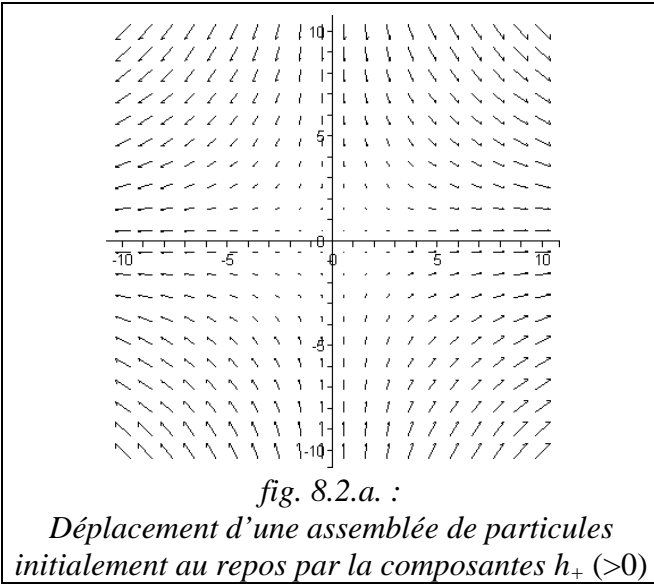
 5) *Propagation dans le vide, vecteur d'onde et gravitons*

L'équation d'onde (8.19) se réduit dans le vide à

$$-\square \bar{h}_{\alpha\beta} = 0 \quad (8.35)$$

Sa solution est bien connue de tout physicien : il s'agit d'une superposition d'ondes planes monochromatiques se propageant à la célérité de la lumière, de type

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = \text{Re} \left\{ H_{\alpha\beta} e^{i\phi} \right\} \quad (8.36)$$



où $H_{\alpha\beta}$ est l'amplitude de l'onde, qui varie sur une échelle de l'ordre du rayon de courbure du front d'onde (et éventuellement du rayon de courbure de l'Univers si la métrique « de fond » n'est pas celle de Minkowski), et ϕ est la phase de l'onde, qui varie sur une échelle beaucoup plus courte de l'ordre de la longueur d'onde λ de l'onde gravitationnelle. On a pour une onde monochromatique se propageant suivant z :

$$\phi = \omega \cdot (z - t) \Rightarrow -\phi_{,t} = \phi_{,z} = \omega \Rightarrow \vec{\nabla}\phi = \vec{k} \Leftrightarrow \phi_{,\alpha} = k_{\alpha} \quad (8.37)$$

avec $k^{\alpha} = (\omega, 0, 0, \omega)$ le vecteur d'onde de l'onde gravitationnelle et

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{k^z} = \frac{1}{\omega}$$

sa longueur d'onde réduite. Conformément à la célérité de l'onde, son vecteur d'onde est de type lumière :

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = 0 \quad (8.38)$$

De cette propriété vient :

$$\vec{\nabla}(\vec{k} \cdot \vec{k}) = 0 \Leftrightarrow 2k_{\alpha,\beta}k^{\beta} = 0 \quad (8.39)$$

où on reconnaît l'équation des géodésiques : le vecteur d'onde suit donc une géodésique de l'espace-temps. Enfin, en jauge de Lorenz, le champ de la perturbation est bien transverse (i.e. orthogonal au vecteur d'onde) :

$$\bar{h}_{\alpha\beta},{}^{\beta} = H_{\alpha\beta}\phi^{,\beta} = H_{\alpha\beta}k^{\beta} = 0 \quad (8.40)$$

En tant que théorie classique respectable, la relativité linéarisée doit admettre une limite quantique. Le quanta attendu dans cette théorie est le graviton, son impulsion et son énergie s'obtiennent de la même manière que celle du photon :

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \quad \varepsilon = -\hbar k_t = \hbar\omega \quad (8.41)$$

Son impulsion ayant les mêmes propriétés que le vecteur d'onde, le graviton se propage à la célérité de la lumière et suit des géodésiques lumières. De plus, les figures 8.2. et 8.3. permettent de deviner son spin. L'électromagnétisme mène à un champ vectoriel invariant par une rotation de 360° , et sa quantification mène au photon, particule de spin 1. L'électron de spin $1/2$ est décrit par la théorie quantique des champs, la théorie est invariante par une rotation de 720° . Les figures 8.2. et 8.3. montrent que le champ tensoriel décrivant la perturbation de la métrique est invariant par une rotation de 180° , on peut donc deviner que le graviton a un spin 2.

Notons d'autre part que les choses se compliquent en relativité générale non-linéarisée : l'énergie du graviton influençant la courbure de l'espace-temps, les quanta de la relativité générale interagissent entre eux, contrairement aux photons.

II. EMISSION

1) Formule du quadrupôle

L'équation d'onde du potentiel vecteur en électromagnétisme

$$-\square\vec{A} = 4\pi\vec{J}$$

admet pour solution la solution des potentiels retardés

$$A_\alpha(\mathbf{x}, t) = \int_{\text{espace}} \frac{J_\alpha(\mathbf{x}', t' = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (8.42)$$

L'équation d'onde (8.19) vérifiée par la perturbation de la métrique :

$$-\square\bar{h}_{\alpha\beta} \approx 16\pi T_{\alpha\beta} \quad (8.43)$$

a donc pour solution :

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t) = 4 \int_{\text{espace}} \frac{T_{\alpha\beta}(\mathbf{x}', t' = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (8.44)$$

Nous l'avons déjà signalé, la manière dont nous avons établi (8.43) contraint la source à être quasi-newtonienne. Dans ce cas, seule les masses contribuent de manière non-négligeable au tenseur énergie-impulsion¹. Pour une source quasi-newtonienne, on a :

$$v \sim \frac{L}{\tilde{\lambda}} \ll 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\lambda} \gg L \quad (8.45)$$

où L est l'ordre de grandeur de l'extension spatiale de la source, $\tilde{\lambda}$ la longueur d'onde réduite de l'onde et v l'ordre de grandeur des vitesses des objets constituant la source. (8.45) dit simplement que la matière voyage dans la source beaucoup moins vite que la lumière. Les formules de la section précédentes pour des ondes planes étaient valides pour un rayon de courbure du front d'onde très grand devant la longueur d'onde, l'approximation de la limite quasi-newtonienne est donc (fig. 8.4.) :

$$r \gg \tilde{\lambda} \gg L \quad (8.46)$$

¹ En fait, (8.43) et (8.44) sont plus générales, mais les contraintes internes entrent en jeu lorsque la source est relativiste, en particulier l'énergie de liaison gravitationnelle.

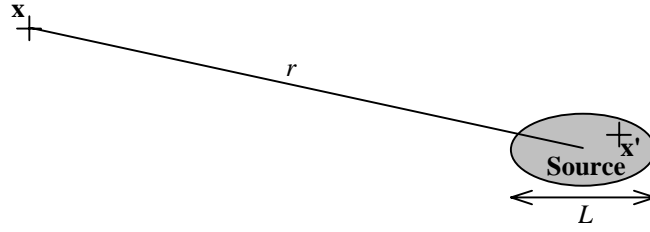


fig. 8.4. : limite quasi-newtonienne : $r \gg \lambda \gg L$

Dans ces limites, on a au premier ordre $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = r$, où r est la distance entre le centre de gravité de la source et le point où on évalue $\bar{\mathbf{h}}$, et (8.44) devient :

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t) = \frac{4}{r} \int_{\text{espace}} T_{\alpha\beta}(\mathbf{x}', t' = t - r) d^3\mathbf{x}' \quad (8.47)$$

De plus, l'interprétation physique ne nécessite que les composantes de la perturbation dans la jauge TT, on se limitera donc au calcul de :

$$h_{jk}^{\text{TT}}(\mathbf{x}, t) = \frac{4}{r} \left[\int_{\text{espace}} T_{jk}(\mathbf{x}', t' = t - r) d^3\mathbf{x}' \right]^{\text{TT}} \quad (8.48)$$

où « TT » signifie « projection TT », au sens discuté à la fin du §I.3.

Nous aimerions pour l'approximation newtonienne exprimer le terme de droite en fonction du terme prépondérant T_{tt} du tenseur énergie-impulsion. Pour ce faire, bricolons la conservation de l'énergie impulsion de la source. Celle-ci étant quasi-newtonienne, on a simplement :

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} T^{tt}{}_{,t} = -T^{tj}{}_{,j} \\ T^{jt}{}_{,t} = -T^{jk}{}_{,k} \end{cases} \quad (8.49)$$

en séparant l'équation en ses parties temporelles et spatiales. L'association de ces deux équations permet d'écrire :

$$T^{tt}{}_{,tt} = -T^{tj}{}_{,jt} = T^{jk}{}_{,jk} \Rightarrow T^{tt}{}_{,tt} x^j x^k = T^{lm}{}_{,lm} x^j x^k \quad (8.50)$$

Remarquons maintenant que :

$$\begin{aligned} (T^{lm} x^j x^k)_{,lm} &= (T^{lm}{}_{,l} x^j x^k + T^{lm} x^j{}_{,l} x^k + T^{lm} x^j x^k{}_{,l})_{,m} \\ &= T^{lm}{}_{,lm} x^j x^k + 2(T^{jm}{}_{,m} x^k + T^{jk} + T^{km}{}_{,m} x^j) \\ &= T^{lm}{}_{,lm} x^j x^k + 2(T^{mj} x^k + T^{mk} x^j)_{,m} - 2T^{kj} \end{aligned}$$

Il vient alors, en injectant dans (8.50) :

$$T^{jk} = \frac{1}{2} T^{tt}{}_{,tt} x^j x^k - \frac{1}{2} (T^{lm} x^j x^k)_{,lm} + (T^{mj} x^k + T^{mk} x^j)_{,m} \quad (8.51)$$

Les deux derniers termes étant des divergences, ils ne contribuent pas à une intégrale sur l'espace. (8.48) devient alors :

$$h_{\text{TT}}^{jk}(\mathbf{x}, t) = \frac{2}{r} \left[\int_{\text{espace}} T^{tt}{}_{,tt} x'^j x'^k d^3\mathbf{x}' \right]_{t'=t-r}^{\text{TT}} \quad (8.52)$$

Les variables x' ne dépendant pas de t , on peut sortir la double dérivation de l'intégrale :

$$h_{\text{TT}}^{jk}(\mathbf{x}, t) = \frac{2}{r} \ddot{Q}^{jk} \quad \text{où} \quad Q^{jk} \equiv \left[\int_{\text{espace}} T^{tt} x'^j x'^k d^3\mathbf{x}' \right]_{t'=t-r}^{\text{TT}} \quad (8.53)$$

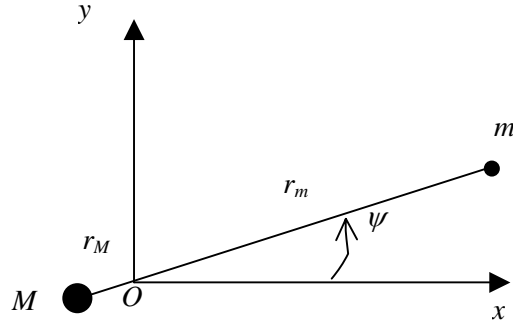


fig. 8.5. : Binaire képlerienne

est la partie transverse sans trace du deuxième moment de la distribution de masse de la source. Traditionnellement on exprime la perturbation de la métrique en fonction du *moment quadrupolaire* Q de la source, obtenu en annulant la trace de Q :

$$h_{\text{TT}}^{jk}(\mathbf{x}, t) = \frac{2}{r} \ddot{Q}_{\text{TT}}^{jk} \quad \text{où} \quad Q^{jk} \equiv \left[\int_{\text{espace}} T^{tt} \left(x'^j x'^k - \frac{1}{3} r^2 \delta^{jk} \right) d^3 \mathbf{x}' \right]_{t'=t-r} \quad (8.54)$$

Ce résultat constitue la *formule du quadrupôle*. On peut reconnaître dans le terme entre parenthèse l'harmonique sphérique d'ordre 2 exprimée en coordonnées cartésiennes. (8.54) est en fait le premier ordre d'un développement en série (développement multipolaire) du terme $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. Nous voyons dans (8.54) que le moment dipolaire d'une distribution de masse ne rayonne pas, contrairement au moment dipolaire électrique, ce qui fait – ainsi que la faiblesse de la constante de gravitation – que le rayonnement gravitationnel est faible comparé au rayonnement électromagnétique. La formule du quadrupôle nous indique aussi que l'implosion d'une étoile donnant naissance à un objet compact (supernova, voir chapitre 7), étant grossièrement sphérique, ne doit pas rayonner beaucoup de rayonnement gravitationnel en comparaison du rayonnement électromagnétique. Signalons enfin qu'il est souvent plus pratique de faire les calculs en utilisant (8.53) plutôt que (8.54)

2) Ondes gravitationnelles générées par un système binaire

Nous avons maintenant la possibilité d'étudier un cas physique. Nous considérons ici l'émission d'ondes gravitationnelles par un système binaire képlerien en orbite circulaire (fig. 8.5.). D'après la troisième loi de Kepler :

$$\Omega = \sqrt{\mathcal{M}/a^3} \quad (8.55)$$

où $\mathcal{M} \equiv M + m$ est la masse totale du système, $a \equiv r_M + r_m$ la longueur du rayon vecteur et $\Omega \equiv \dot{\psi}$ sa vitesse angulaire de rotation. La partie temporelle du tenseur énergie-impulsion s'écrit :

$$T^{tt}(\mathbf{x}', t') \simeq \rho(\mathbf{x}') = M \delta(-r_M \cos(\Omega t') - x') \delta(-r_M \sin(\Omega t') - y') \delta(z') \\ + m \delta(r_m \cos(\Omega t') - x') \delta(r_m \sin(\Omega t') - y') \delta(z') \quad (8.56)$$

L'intégration pour obtenir le moment quadrupolaire de la source ne pose aucune difficulté :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{xx} = \int_{\text{espace}} \left[M \delta(-r_M \cos(\Omega t') - x') + m \delta(r_m \cos(\Omega t') - x') \right] x'^2 d^3 \mathbf{x}' \\ \quad = M r_M^2 \cos^2(\Omega t') + m r_m^2 \cos^2(\Omega t') \\ Q_{yy} = M r_M^2 \sin^2(\Omega t') + m r_m^2 \sin^2(\Omega t') \\ Q_{xy} = Q_{yx} = M r_M^2 \cos(\Omega t') \sin(\Omega t') + m r_m^2 \cos(\Omega t') \sin(\Omega t') \\ Q_{zz} = Q_{zx} = Q_{zy} = Q_{xz} = Q_{yz} = 0 \end{array} \right. \quad (8.57)$$

Or $r_M = am/\mathcal{M}$ et $r_m = aM/\mathcal{M}$, il vient en posant $\mu \equiv mM/\mathcal{M}$ la masse réduite du système :

$$\begin{cases} Q_{xx} = 2a^2\mu \cos^2(\Omega t') \\ Q_{yy} = 2a^2\mu \sin^2(\Omega t') \\ Q_{xy} = Q_{yx} = 2a^2\mu \cos(\Omega t') \sin(\Omega t') \\ Q_{zz} = Q_{zx} = Q_{zy} = Q_{xz} = Q_{yz} = 0 \end{cases} \quad (8.58)$$

Modifions enfin ces expressions pour faire apparaître des pulsations 2Ω , attendues dans l'onde gravitationnelle puisqu'elle est invariante par rotation de 180° (la fréquence des ondes gravitationnelles est donc double de la fréquence de rotation du système) :

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta)) & \sin^2 \theta &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)) & \cos \theta \sin \theta &= \frac{1}{2} \sin(2\theta) \\ \Rightarrow \begin{cases} Q_{xx} &= a^2\mu(1 + \cos(2\Omega t')) \\ Q_{yy} &= a^2\mu(1 - \cos(2\Omega t')) \\ Q_{xy} = Q_{yx} &= a^2\mu \sin(2\Omega t') \end{cases} \end{aligned} \quad (8.59)$$

Le calcul de la perturbation de la métrique requiert les dérivées secondes temporelles de (8.59) :

$$\begin{cases} \ddot{Q}_{xx} = -\frac{4\mathcal{M}\mu}{a} \cos(2\Omega t') \\ \ddot{Q}_{yy} = \frac{4\mathcal{M}\mu}{a} \cos(2\Omega t') \\ \ddot{Q}_{xy} = \ddot{Q}_{yx} = -\frac{4\mathcal{M}\mu}{a} \sin(2\Omega t') \end{cases} \quad (8.60)$$

(on a utilisé la troisième loi (8.55)). On a finalement d'après (8.53) si le point d'observation est sur l'axe z (la trace est déjà nulle, et la perturbation est déjà transverse, il est donc inutile d'opérer à une projection TT) :

$$h_+ = -\frac{8\mathcal{M}\mu}{ar} \cos(2\Omega t') \quad h_\times = -\frac{8\mathcal{M}\mu}{ar} \sin(2\Omega t') \quad (8.61)$$

Cherchons maintenant à extraire des valeurs numériques de nos résultats. La métrique n'ayant pas de dimensions, l'amplitude de l'onde (8.61) s'écrit dans le système international d'unités :

$$H_+ = -\frac{8G^2\mathcal{M}\mu}{c^4 ar} = -\frac{16G}{c^4 r} E_{\text{cin}}^{\text{NS}} \quad (8.62)$$

où

$$E_{\text{cin}}^{\text{NS}} = \frac{1}{2}\mu \frac{GM}{a} = \frac{1}{2}\mu v^2 \quad (8.63)$$

est la partie non-sphérique de l'énergie cinétique de la source (dans le cas du système binaire, il n'y a bien sûr pas d'énergie cinétique à symétrie sphérique). Nous avons vu au chapitre 6 que la troisième loi de Kepler restait valide pour les orbites circulaires en géométrie de Schwarzschild : le résultat (8.62) reste donc valable lorsque l'objet en orbite peut être considéré comme une perturbation de la métrique de Schwarzschild :

$$\mu \ll \mathcal{M} \Rightarrow \mu \simeq m \text{ et } \mathcal{M} \simeq M \quad (8.64)$$

et que l'approximation quasi-newtonienne est satisfaite, i.e. :

$$v \ll c \Leftrightarrow \tilde{\lambda} \gg L \Leftrightarrow 1/2\Omega \gg 2M \Leftrightarrow a \gg 2M \quad (8.65)$$

Pour un trou noir de 10 masses solaires orbitant autour du trou-noir massif situé au centre de notre galaxie ($M \approx 3 \times 10^6 M_\odot$, $r \approx 8 \text{ kpc} \approx 2,5 \times 10^{20} \text{ m}$) à une distance de $a = 50M$:

$$f_{\text{OG}} = \frac{2\Omega}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{GM_\odot}{a^3}} \approx 1,0 \text{ mHz} \quad H_+ \approx 1,0 \times 10^{-17} \quad (8.66)$$

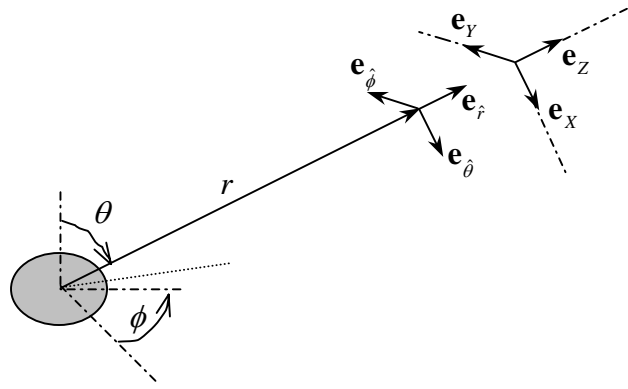


fig. 8.6. : Base sphérique orthonormée et projection TT

i.e. si on se place à l'origine d'un référentiel inertiel local au voisinage de la Terre et que l'on mesure le déplacement relatif d'un objet situé à une centaine de mètres de l'origine, le déplacement mesuré au passage de l'onde gravitationnelle est de l'ordre du centième du diamètre d'un noyau d'atome ! Le centre galactique étant le foyer d'objets relativistes le plus proche de nous, on doit bien se faire à l'idée que la détection directe d'ondes gravitationnelles doit poser de sérieux problèmes techniques. (8.60) n'est pas exploitable directement pour calculer les composantes TT de la perturbation dans une direction différente de l'un des axes x , y ou z . Une solution consiste à passer dans une base orthonormée sphérique $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi\}$, permettant directement de faire une projection TT dans la direction voulue en posant $\ddot{Q}_{rr} = 0$, la base cartésienne du référentiel d'observation dans lequel l'onde se propage vers les z croissants étant alors $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\} = \{\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_r\}$ (fig. 8.6.).

On exprime donc d'abord la partie transverse de (8.60) dans la base naturelle sphérique, avec :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \quad (8.67)$$

Puis on passe dans la base orthonormée associée

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \quad ; \quad \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi$$

Quelques arrangements trigonométriques simples mènent à :

$$\ddot{Q}^{\hat{i}\hat{j}} = \frac{\partial x^{\hat{i}}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{\hat{j}}}{\partial x^m} \ddot{Q}^{km} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{Q}^{\hat{\theta}\hat{\theta}} = \cos^2 \theta [\cos(2\phi) \ddot{Q}_{xx} + \sin(2\phi) \ddot{Q}_{yy}] \\ \ddot{Q}^{\hat{\phi}\hat{\phi}} = -[\cos(2\phi) \ddot{Q}_{xx} + \sin(2\phi) \ddot{Q}_{yy}] \\ \ddot{Q}^{\hat{\theta}\hat{\phi}} = \ddot{Q}^{\hat{\phi}\hat{\theta}} = \cos \theta [\sin(2\phi) \ddot{Q}_{xx} - \cos(2\phi) \ddot{Q}_{yy}] \end{cases} \quad (8.68)$$

Il vient, en injectant (8.60), en effectuant la projection TT (poser $\ddot{Q}^{\hat{r}\hat{\alpha}} = \ddot{Q}^{\hat{\alpha}\hat{r}} = 0$ et annuler la trace) :

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_{\hat{\theta}\hat{\theta}}^{\text{TT}} = -\ddot{Q}_{\hat{\phi}\hat{\phi}}^{\text{TT}} &= -\frac{2\mathcal{M}\mu}{a} (1 + \cos^2 \theta) \cos(2\Omega t' - 2\phi) \\ \ddot{Q}_{\hat{\theta}\hat{\phi}}^{\text{TT}} = \ddot{Q}_{\hat{\phi}\hat{\theta}}^{\text{TT}} &= -\frac{2\mathcal{M}\mu}{a} 2 \cos \theta \sin(2\Omega t' - 2\phi) \end{aligned} \quad (8.69)$$

et la formule du quadrupôle donne finalement :

$$\begin{aligned} h_+ &= -\frac{4\mathcal{M}\mu}{ar} (1 + \cos^2 \theta) \cos(2\Omega t' - 2\phi) = -\frac{8E_{\text{cin}}^{\text{NS}}}{r} (1 + \cos^2 \theta) \cos(2\Omega t' - 2\phi) \\ h_\times &= -\frac{4\mathcal{M}\mu}{ar} 2 \cos \theta \sin(2\Omega t' - 2\phi) = -\frac{8E_{\text{cin}}^{\text{NS}}}{r} 2 \cos \theta \sin(2\Omega t' - 2\phi) \end{aligned} \quad (8.70)$$



fig. 8.7. : Diagrammes de rayonnement d'une binaire képlerienne en orbite circulaire

L'amplitude de la perturbation est donc maximale si l'observation est faite sur l'axe $\theta = 0$ et minimale dans le plan $\theta = \pi/2$ où l'onde est polarisée « + ». Le diagramme de rayonnement du système binaire est indiqué en fig. 8.7. et un exemple d'évolution de la perturbation est montré en fig. 8.8.

3) Tenseur énergie-impulsion de l'onde gravitationnelle

Il est délicat de parler d'énergie du champ gravitationnel, mais il est clair que l'onde gravitationnelle en transporte à l'infini puisqu'elle déplace des particules tests dans le référentiel inertiel local d'un observateur situé dans la région asymptotique. Dans le cas du champ électromagnétique (chapitre 3), l'énergie est décrite par des termes quadratiques en \mathbf{E} et \mathbf{B} , de même qu'en physique plus élémentaire il est impossible de parler de l'énergie stockée par corde vibrante sans considérer l'influence des termes non-linéaires. L'approche linéaire utilisée jusqu'ici ne nous permet donc pas d'approcher l'énergie. A l'ordre un en la perturbation, les équations du champ dans le vide sont :

$$R_{\alpha\beta}^{(1)} = 0 \quad (8.71)$$

Cependant, si l'on pousse le développement au deuxième ordre, les équations d'Einstein dans le vide ne sont plus satisfaites : $R_{\alpha\beta}^{(2)} \neq 0$. Pour les voir satisfaites, il faut pousser le développement de la métrique au deuxième ordre :

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}^{(2)} \quad (8.72)$$

(avec $|h_{\alpha\beta}^{(2)}| \ll |h_{\alpha\beta}| \ll 1$) et imposer :

$$G_{\alpha\beta}^{(1)}(h_{\alpha\beta}^{(2)}) + G_{\alpha\beta}^{(2)}(h_{\alpha\beta}^{(1)}) = 0 \quad (8.73)$$

avec $G_{\alpha\beta}^{(2)}(h_{\alpha\beta}^{(1)}) = R_{\alpha\beta}^{(2)} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}R^{(2)}$. On peut réécrire cette équation sous la forme :

$$G_{\alpha\beta}^{(1)}(h_{\alpha\beta}^{(2)}) = 8\pi T_{\alpha\beta}^{\text{OG}} \quad \text{avec} \quad T_{\alpha\beta}^{\text{OG}} \equiv -\frac{1}{8\pi}G_{\alpha\beta}^{(2)}(h_{\alpha\beta}^{(1)}) \quad (8.74)$$

Ainsi, on voit que la perturbation implique au deuxième ordre une courbure de l'espace-temps comme le ferait de la matière dont le tenseur énergie-impulsion serait de la forme de $T_{\alpha\beta}^{\text{OG}}$. Ce tenseur est en fait un « pseudo-tenseur », dans le sens où il n'est pas invariant de jauge. On peut montrer cependant que certaines quantités construites à partir de lui le sont, c'est le cas en particulier de l'énergie totale E située sur une 3-surface de simultanéité (i.e. dans un 3-volume de type espace à t fixé) :

$$E = \int_{\Sigma} T_{tt}^{\text{OG}} d\mathbf{x} \quad (8.75)$$

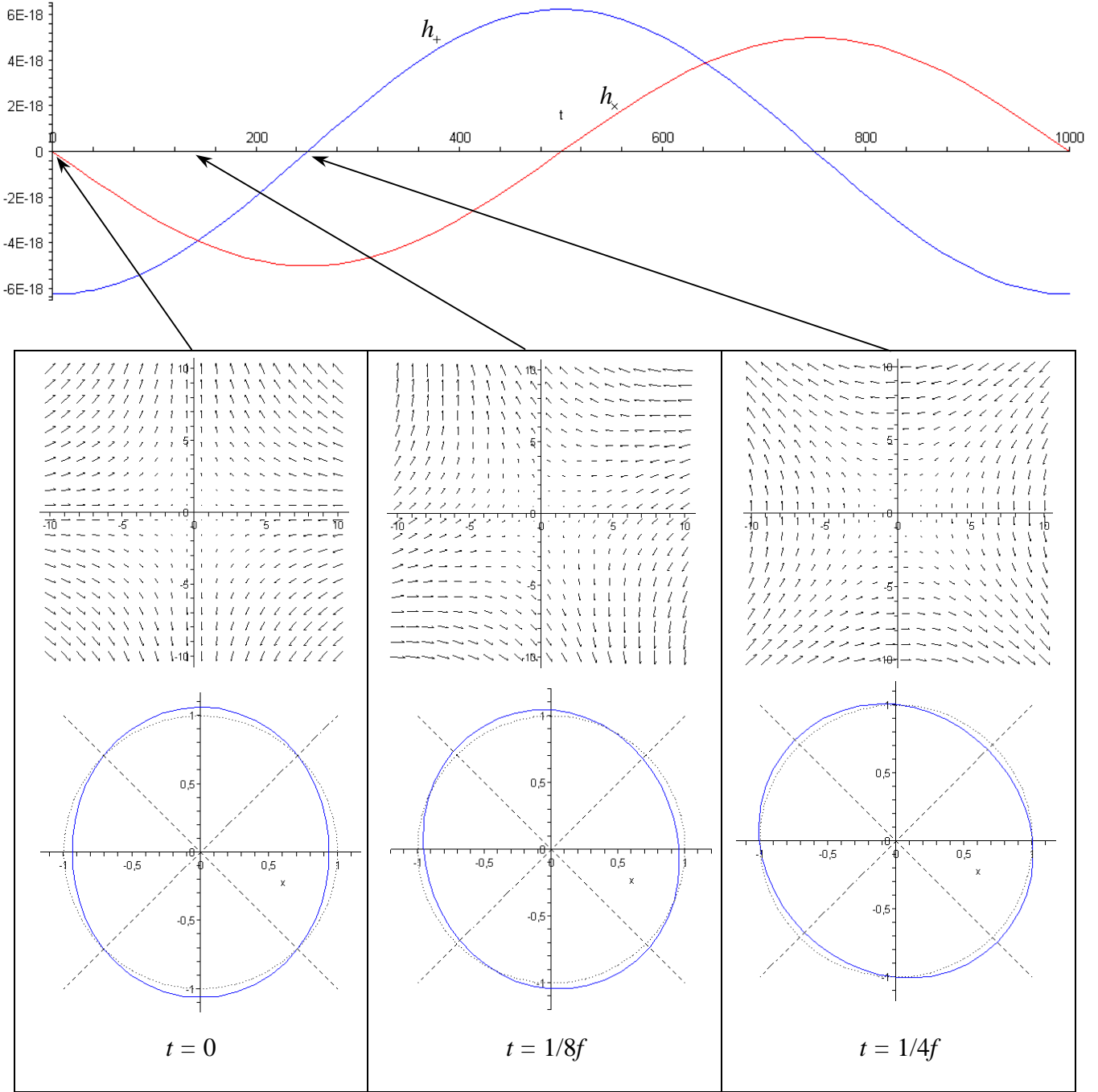


fig. 8.8. : Evolution de la perturbation et déplacement des particules pour l'exemple (8.66) dans une direction d'observation $\theta = \pi/3$

et de l'énergie totale rayonnée à l'infini :

$$\Delta E = \int_S T_{ii}^{\text{OG}} dS^i dt \tag{8.76}$$

De plus, on peut montrer que l'énergie transportée par l'onde est conservée au deuxième ordre en h :

$$T_{\alpha\beta}^{\text{OG},\beta} = 0 \tag{8.77}$$

Un calcul mené par Isaacson à la fin des années 60 donne pour les composantes de \mathbf{T}^{OG} , en jauge TT et dans l'approximation des ondes planes :

$$T_u^{\text{OG}} = -T_r^{\text{OG}} = T_{rr}^{\text{OG}} = \frac{1}{16\pi} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle = \frac{1}{32\pi} \langle (\dot{h}_{jk}^{\text{TT}})^2 \rangle \tag{8.78}$$

où on somme sur toutes les valeurs de j et k , où le point indique une dérivée par rapport au temps de coordonnée et où les $\langle \rangle$ indiquent une moyenne sur une période de l'onde : l'énergie transportée par l'onde n'est donc pas localisable plus précisément. On obtient en injectant la formule du quadrupôle :

$$T_{tt}^{\text{OG}} = -T_{tr}^{\text{OG}} = T_{rr}^{\text{OG}} = \frac{1}{8\pi r^2} \left\langle \left(\ddot{Q}_{jk}^{\text{TT}} \right)^2 \right\rangle \quad (8.79)$$

La partie temporelle de l'équation de conservation (8.77) permet, en intégrant sur une 3-sphère à l'infini, d'obtenir la puissance rayonnée à l'infini dans l'approximation quadrupolaire :

$$\frac{dE}{dt} = -\oint T_{\text{OG}}^{tz} dS \quad (8.80)$$

L'intégration n'étant pas triviale, puisque la projection TT fait apparaître une dépendance en θ et ϕ . Sans plus de détails, on trouve :

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{5} \left\langle \ddot{Q}_{jk}^2 \right\rangle \quad (8.81)$$

Cette formule se charge de la projection TT. Il y a aussi un flux de moment cinétique transporté à l'infini :

$$\frac{dL_i}{dt} = -\frac{2}{5} \varepsilon_{ijk} \left\langle \ddot{Q}_{jm} \ddot{Q}_{km} \right\rangle \quad (8.82)$$

Le flux d'impulsion est quant à lui nul dans l'approximation quadrupolaire.

III. APPLICATION AUX SYSTEMES BINAIRES

1) Binaire circulaire

Pour une binaire circulaire, on a (équation (8.60)) :

$$\begin{cases} \ddot{Q}_{xx} = -\ddot{Q}_{yy} = -\frac{4M\mu}{a} \cos(2\Omega t') \\ \ddot{Q}_{xy} = \ddot{Q}_{yx} = -\frac{4M\mu}{a} \sin(2\Omega t') \end{cases} \quad (8.83)$$

Il vient facilement :

$$\left\langle \ddot{Q}_{xx}^2 \right\rangle = \left\langle \ddot{Q}_{yy}^2 \right\rangle = \left\langle \ddot{Q}_{xy}^2 \right\rangle = \left\langle \ddot{Q}_{yx}^2 \right\rangle = 8 \left(\frac{M\mu\Omega}{a} \right)^2 \quad (8.84)$$

d'où une puissance rayonnée (ou luminosité gravitationnelle) :

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32}{5} \frac{M^2 \mu^2 \Omega^2}{a^2} = -\frac{32}{5} \frac{M^3 \mu^2}{a^5} \quad (8.85)$$

Pour se faire une idée, passons dans le système international d'unités et cherchons des valeurs numériques :

$$\dot{E} = -\frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{\mu^2 M^3}{a^5} \quad (8.86)$$

Les positions des facteurs G et c conspirent à rendre très faible le rayonnement gravitationnel. On obtient pour la Terre orbitant autour du Soleil $\dot{E} \approx 20 \text{ mW}$... il n'y a donc pas de quoi faire briller une ampoule. Pour le système (8.66) en revanche, on calcule $\dot{E} \sim 10^{33} \text{ W}$. Les quantités d'énergies libérées par des systèmes relativistes sont donc énormes, ce qui indique que les corps en orbite ne suivent pas des géodésiques comme on l'a supposé jusqu'à maintenant : au fur et à mesure qu'ils perdent de l'énergie, ils spiralent l'un vers l'autre jusqu'à entrer en collision.

Le problème à deux corps reste ouvert en relativité générale : on ne sait pas calculer l'effet sur les astres de la réaction de rayonnement engendrée par l'émission d'énergie et de moment cinétique. Plusieurs approximations approximatives existent cependant, et la plus simple d'entre-elles est le

modèle de la spirale adiabatique, applicable si l'énergie rayonnée au cours d'une orbite reste faible par rapport à l'énergie du système. Dans le cas de l'exemple (8.66) :

$$E = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}} = -\frac{1}{2} \frac{G\mu\mathcal{M}}{a} \Rightarrow \frac{\dot{E}T}{E} \sim 10^{-15} \quad (8.87)$$

et la méthode est utilisable sans aucune arrière-pensée jusqu'à la dernière orbite stable. On peut alors considérer que les masses suivent des orbites quasi-képlériennes. On a alors :

$$\frac{dE}{da} = \frac{1}{2} \frac{\mu\mathcal{M}}{a^2} \quad (8.88)$$

et il vient :

$$\dot{a} = \frac{da}{dE} \dot{E} = -\frac{2a^2}{\mu\mathcal{M}} \cdot \frac{32}{5} \frac{\mu^2 \mathcal{M}^3}{a^5} = -\frac{64}{5} \frac{\mu\mathcal{M}^2}{a^3} \quad (8.89)$$

L'évolution de a sous l'influence de l'énergie perdue par rayonnement s'obtient facilement par intégration :

$$dt' = -\frac{5}{64} \frac{a^3}{\mu\mathcal{M}^2} da \Rightarrow t' = -\frac{5}{256} \frac{a^4 - a_0^4}{\mu\mathcal{M}^2} \quad (8.90)$$

soit :

$$a(t') = a_0 \left(1 - \frac{t'}{\tau}\right)^{1/4} \quad (8.91)$$

où a_0 est le rayon de l'orbite à $t' = 0$ et

$$\tau = \frac{5}{256} \frac{a_0^4}{\mu\mathcal{M}^2} \quad (8.92)$$

est la « durée de collision » au bout de laquelle formellement $a \rightarrow 0$. Pour la Terre spiralant vers le Soleil $\tau \sim 10^{23}$ ans (!), pour un trou noir de 10 masses solaires spiralant vers le centre galactique à partir de $a_0 = 20 M$, on obtient

$$\tau = \frac{5}{256} \frac{c^5}{G^3} \frac{a_0^4}{\mu\mathcal{M}^2} \sim 10^{10} \text{ s} \sim 100 \text{ ans} \quad (8.93)$$

(8.70) et (8.91) montrent que l'amplitude de l'onde étant inversement proportionnelle à a elle augmente comme $(1-t'/\tau)^{-1/4}$ à mesure que les deux astres se rapprochent. De plus, la fréquence augmente puisque la vitesse angulaire est fonction de a :

$$\Omega(t) = \sqrt{\frac{\mathcal{M}}{a^3}} = \sqrt{\frac{\mathcal{M}}{a_0^3}} \left(1 - \frac{t'}{\tau}\right)^{-3/8} \quad (8.94)$$

Enfin, il n'est pas nécessaire ici d'utiliser (8.82) pour calculer l'évolution du moment cinétique orbital. On a en effet :

$$L(t) = \mu a^2 \Omega = \mu \sqrt{\mathcal{M}a} = \mu \sqrt{\mathcal{M}a_0} \left(1 - \frac{t'}{\tau}\right)^{1/8} \quad (8.95)$$

L'intégration pour obtenir l'angle $\psi(t)$ (fig. 8.5) à partir de (8.94) est immédiate :

$$\psi(t) = \int \Omega(t') dt' = \frac{8}{5} \tau \sqrt{\frac{\mathcal{M}}{a_0^3}} \left[1 - \left(1 - \frac{t'}{\tau}\right)^{5/8}\right] \quad (8.96)$$

la constante d'intégration étant ici choisie telle que $\psi(0) = 0$. La formule (8.70) devient donc, en tenant compte la perte d'énergie :

$$\begin{cases} h_+ = -\frac{4\mathcal{M}\mu}{a_0 r} (1-t'/\tau)^{-1/4} (1 + \cos^2 \theta) \cos(2\psi(t') - 2\phi) \\ h_x = -\frac{4\mathcal{M}\mu}{a_0 r} (1-t'/\tau)^{-1/4} 2 \cos \theta \sin(2\psi(t') - 2\phi) \end{cases} \quad (8.97)$$

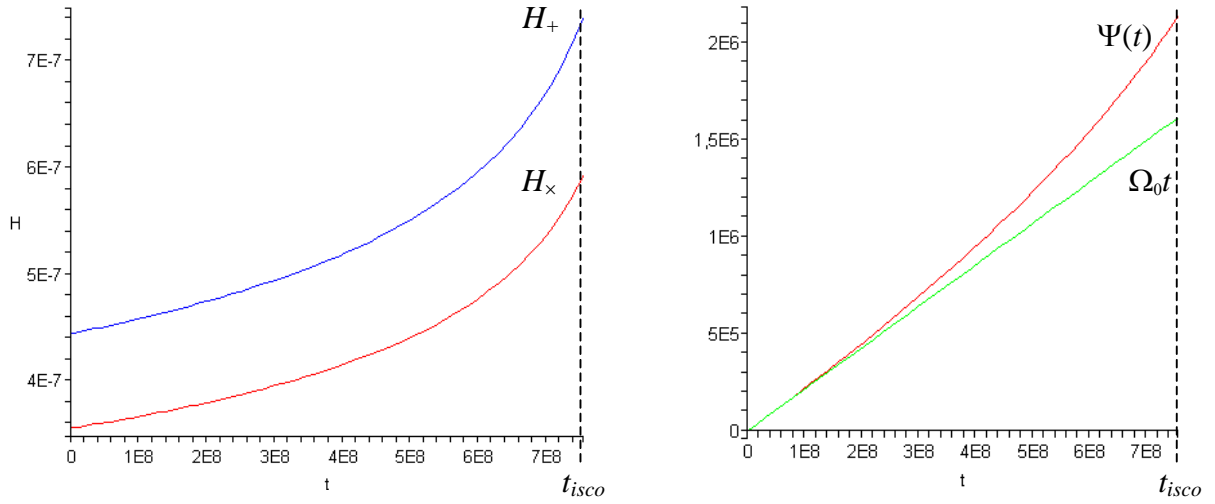


fig. 8.9 : Evolution de l'amplitude de l'onde gravitationnelle et de la phase
 ($\mathcal{M} = 3 \times 10^6 M_\odot, a_0 = 10\mathcal{M}$)

Dans l'exemple de la figure 8.9. , les résultats valables pour $a \gg M$ ont été extrapolés en ordre de grandeur jusqu'à la dernière orbite circulaire stable

$$a_{isco} = 6M \Rightarrow t'_{isco} = \left[1 - \left(\frac{6M}{a_0} \right)^4 \right] \tau \quad (8.98)$$

Au niveau de la dernière orbite stable, la luminosité gravitationnelle est de l'ordre de :

$$\dot{E}_{isco} \sim -\frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{\mu^2 \mathcal{M}^3}{a_{isco}^5} \sim -10^{38} \text{ W} \sim 10^{12} L_\odot ! \quad (8.99)$$

où L_\odot est la luminosité électromagnétique du Soleil. Enfin, la variation d'énergie du système binaire depuis $t = 0$ jusqu'à la dernière orbite stable s'écrit :

$$\Delta E = \int \dot{E} dt' = -32 \frac{\mu^2 \mathcal{M}^3}{a_0^5} \tau \left[1 + \left(\frac{a_{isco}}{a_0} \right)^{4/5} \right] \quad (8.100)$$

soit de l'ordre de $\Delta E \sim -10^{37}$ J pour l'exemple de la binaire de la figure 8.9.

2) Effet de l'entraînement des référentiels inertiels

Il est nécessaire pour un trou noir de Kerr de s'affranchir de fixer un système de coordonnées pour lequel l'orbite est contenue dans le plan (x,y) (on prendra en effet le moment cinétique du trou noir suivant l'axe z). Si $\hat{\mathbf{N}}$ est le vecteur unitaire pointant du point d'observation vers la source et $\hat{\mathbf{L}}$ le vecteur unitaire ayant la direction du moment cinétique orbital du système binaire, on peut réécrire (8.97) sous la forme :

$$\begin{cases} h_+ = \frac{4\mathcal{M}\mu}{a_0 r} (1-t'/\tau)^{-1/4} \left(1 + (\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{L}})^2 \right) \cos(2\psi(t') + 2\Psi) \\ h_x = -\frac{4\mathcal{M}\mu}{a_0 r} (1-t'/\tau)^{-1/4} 2\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{L}} \sin(2\psi(t') + 2\Psi) \end{cases} \quad (8.101)$$

où Ψ est l'angle de $\hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{L}}$ au rayon vecteur pris à l'origine des dates $\mathbf{a}(t' = 0)$ (voir fig. 8.10).

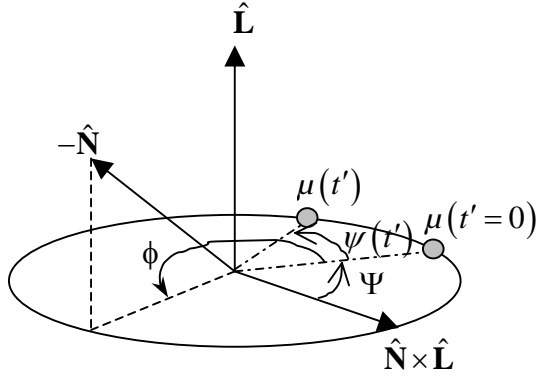


fig.8.10 : Nouvelles notations

$$\left(\Psi = \frac{3\pi}{2} - \phi \right)$$

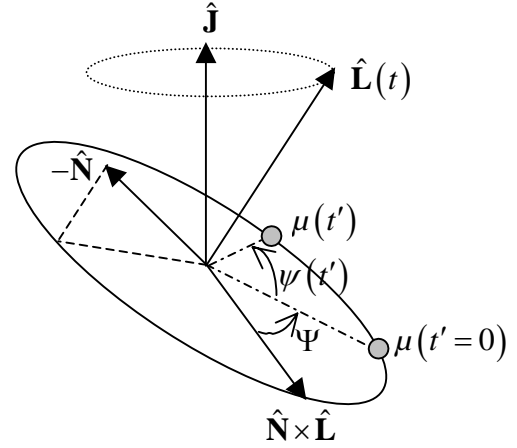


fig.8.11 : Notations associées à la précession du plan de l'ellipse dans le cas d'un trou noir de Kerr

Nous nous intéressons maintenant au cas limite d'un système binaire en orbite circulaire composé d'un trou noir de Kerr, de masse M et de moment cinétique $\mathbf{J} = a_{\text{rot}} M \mathbf{e}_z$, et d'un astre de faible masse $m \ll M$ et de moment cinétique négligeable. Nous resterons de plus dans l'approximation quasi-newtonienne (i.e. nous considérons une ellipse képlérienne perturbée par les termes d'un développement en M/r , de plus ici l'excentricité est nulle).

Il apparaît alors un terme correspondant à l'entraînement des référentiel inertiel par le trou noir (*couplage spin-orbite*). La vitesse angulaire d'entraînement (7.88) s'écrit au premier ordre non nul en M/a :

$$\omega \simeq \frac{2Ma_{\text{rot}}}{a^3} = \frac{G}{c^2} \frac{2J}{a^3} \quad (8.102)$$

Le moment cinétique orbital \mathbf{L} du système binaire précède donc autour de l'axe de rotation du trou noir avec une vitesse angulaire instantanée ω (fig. 8.11). En injectant la solution (8.91) pour $a(t')$ dans (8.102) on calcule l'angle α duquel \mathbf{L} a pivoté autour de \mathbf{J} à la date t :

$$\alpha(t') = \int_0^{t'} \omega dt' = 2J \int_0^{t'} \frac{dt'}{a(t')^3} = \frac{2J\tau^{3/4}}{a_0^3} \int_0^{t'} \frac{dt}{(\tau-t')^{3/4}} = -\frac{8J\tau}{a_0^3} \left[1 - \left(1 - \frac{t'}{\tau} \right)^{1/4} \right] \quad (8.103)$$

En choisissant les axes du repère tels que $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{J}}$ et $\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{L}}(t'=0) = 0$ et en notant $\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{J}} = \cos \lambda$:

$$\hat{\mathbf{L}}(t') = \sin \lambda (\cos \alpha(t') \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \alpha(t') \hat{\mathbf{e}}_2) + \cos \lambda \hat{\mathbf{J}} \quad (8.104)$$

On calcule alors si la direction de $-\hat{\mathbf{N}}$ dans le système de coordonnées de Kerr est (θ, ϕ) :

$$\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{L}}(t') = -\sin \lambda \sin \theta (\cos \phi \cos \alpha(t') + \sin \phi \sin \alpha(t')) - \cos \lambda \cos \theta \quad (8.105)$$

la perturbation de la métrique s'écrivant finalement (fig. 8.12) :

$$\begin{cases} h_+ = \frac{4M\mu}{a_0 r} (1-t'/\tau)^{-1/4} \left(1 + (\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{L}}(t'))^2 \right) \cos(2\psi(t') + 2\Psi(t')) \\ h_x = -\frac{4M\mu}{a_0 r} (1-t'/\tau)^{-1/4} 2\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{L}}(t') \sin(2\psi(t') + 2\Psi(t')) \end{cases} \quad (8.106)$$

L'amplitude et la fréquence de l'onde gravitationnelle sont donc modulées par la précession du périhélie due au moment cinétique du trou noir. Les ondes attendues dans le cas particulier des orbites circulaires sont données en figure 8.13.

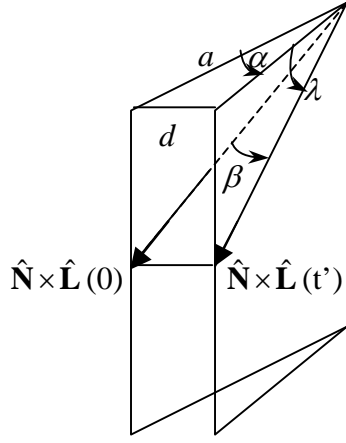


fig. 8.12. :

$$\tan \beta = \frac{d}{a/\cos \lambda} = \cos \lambda \tan \alpha$$

donc $\hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{L}}$ se rapproche de la position $\mu(t'=0)$:
 $\Psi(t') = \Psi_0 - \beta(t') = \Psi_0 - \arctan(\cos \lambda \tan \alpha(t'))$

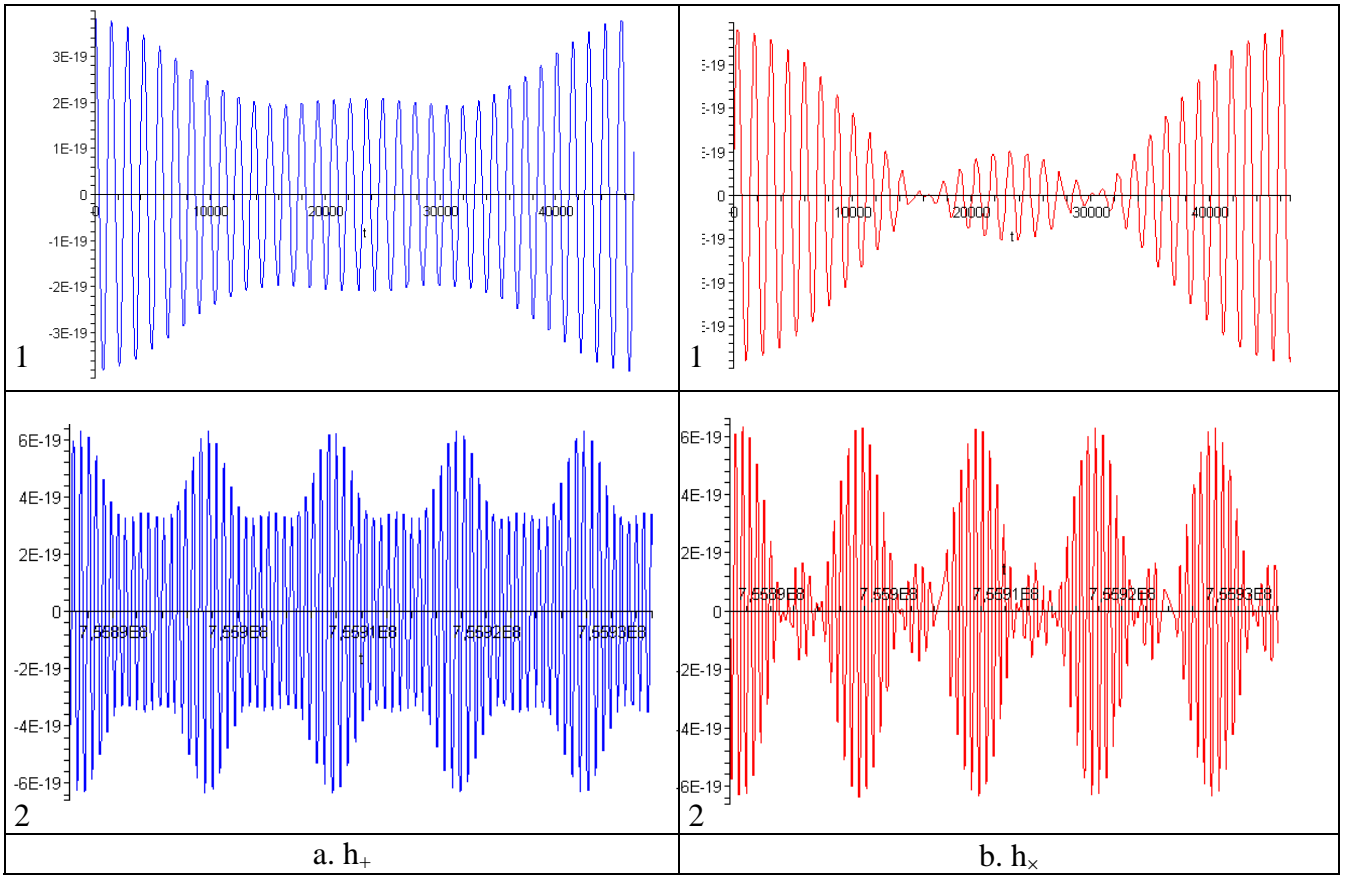


fig. 8.13. : Onde gravitationnelles émises par un objet compact chutant vers un trou noir de Kerr (1 : lorsque $a = 10M$ et 2 : au niveau de la dernière orbite circulaire stable)

Les caractéristiques de la binaire sont, avec les notations du texte :

$$M = 3 \times 10^6 M_{\odot} \quad a_{\text{rot}} = M \quad m = 10 M_{\odot} \quad \lambda = \pi/4 \quad \Psi_0 = 0$$

La direction d'observation est telle que :

$$\theta = \pi/3 \quad \phi = 0 \quad r = 1 \text{ Mpc}$$

3) *Binaire elliptique*

 a. Expression de \mathbf{h}

On s'intéresse ici à la forme des ondes gravitationnelles émises par une binaire en orbite elliptique au cours d'une période. On ne prend pas en compte la modification de l'énergie du système due à l'émission d'ondes gravitationnelles ni l'effet de l'entraînement des référentiels. L'ellipse de Kepler est caractérisée par l'équation :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \psi} \quad (8.107)$$

où $p \equiv a(1 - e^2)$ est le paramètre de l'ellipse, a son demi grand-axe et e son excentricité. La troisième loi de Kepler donne :

$$\dot{\psi} = \frac{\sqrt{\mathcal{M}p}}{r^2} = \sqrt{\frac{\mathcal{M}}{p^3}} (1 + e \cos \psi)^2 \quad (8.108)$$

d'où :

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\psi} \dot{\psi} = e \sqrt{\frac{\mathcal{M}}{p}} \sin \psi \quad (8.109)$$

On peut maintenant calculer le moment quadripolaire et ses dérivées temporelles en fonction de r et ϕ , puis à passer en jauge TT pour obtenir, dans une direction d'observation (θ, ϕ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_+ (\psi) = -H (1 + \cos^2 \theta) (1 + e \cos \psi)^2 \\ \quad \times \left[\cos(2\psi - 2\phi) + e \cos(2\psi) \left(\cos^3 \psi + \frac{e + \cos \psi}{2} \right) + e \sin(2\psi) (\sin^3 \psi + 2 \cos \psi \sin \psi) \right] \\ h_\times (\psi) = H \times 2 \cos \theta (1 + e \cos \psi)^2 \\ \quad \times \left[\sin(2\psi - 2\phi) + e \sin(2\psi) \left(\cos^3 \psi + \frac{e + \cos \psi}{2} \right) + e \cos(2\psi) (\sin^3 \psi + 2 \cos \psi \sin \psi) \right] \end{array} \right. \quad (8.110)$$

où l'amplitude H est donnée par :

$$H = \frac{2\mu\mathcal{M}}{da(1 - e^2)} = \frac{2G^2\mu\mathcal{M}}{c^4 da(1 - e^2)} \quad (8.111)$$

(avec d la distance d'observation), et où la dépendance temporelle est implicite via (8.108) :

$$t' = \sqrt{\frac{p^3}{\mathcal{M}}} \int_0^\psi \frac{d\psi'}{(1 + e \cos \psi')^2} \quad (8.112)$$

La figure 8.14 donne l'allure des ondes attendues. Comme l'objet compact se déplace plus rapidement près du périhélie, les ondes gravitationnelles, proportionnelles à l'énergie cinétique, sont plus importantes au cours de cette demi-orbite, qui est aussi plus courte pour la même raison.

b. Circularisation des orbites excentriques

Lorsqu'un trou noir supermassif (e.g. le trou noir central d'une galaxie) capture un objet compact, on peut s'attendre à ce que l'excentricité de l'orbite soit très proche de 1 (fig.8.15.). L'émission d'énergie par rayonnement gravitationnel se fait alors par pulses, elle est localisée près du périastre, sur un angle ~ 1 rad (fig.8.16). Pour un calcul en ordre de grandeur, on peut considérer que la trajectoire au cours de l'émission d'énergie est circulaire, de rayon $r = r_{\text{périhélie}} = a(1 - e)$.

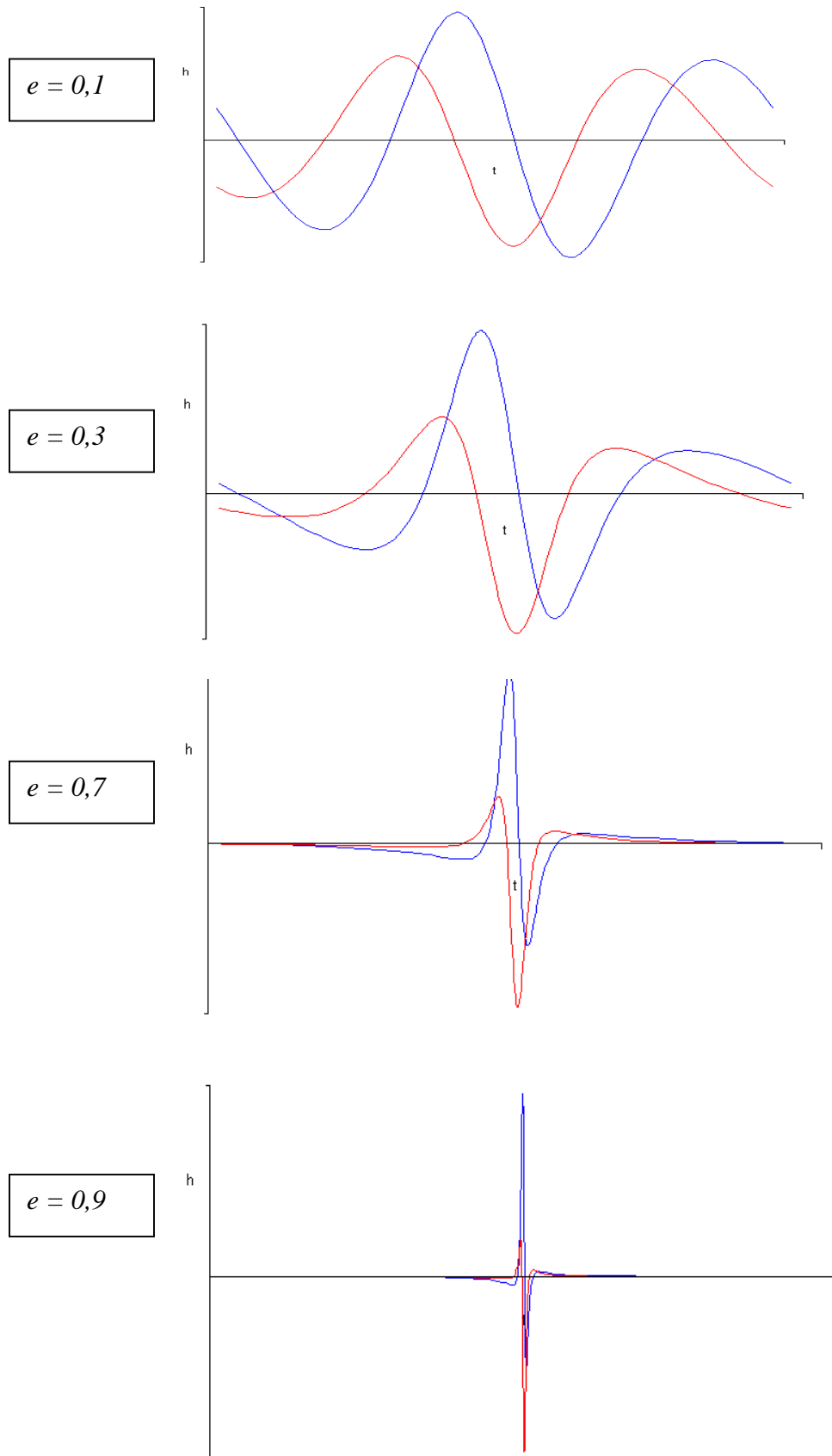


fig.8.14 : Une période pour h_+ (bleu) et h_x (rouge) pour des binaires elliptiques de différentes excentricités

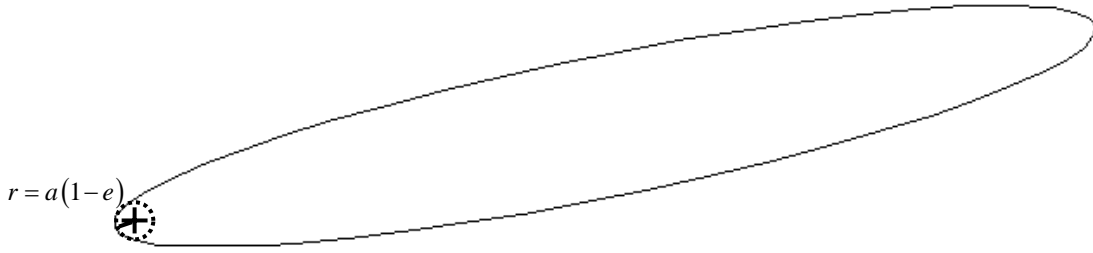


fig.8.15 : Orbite très excentrique

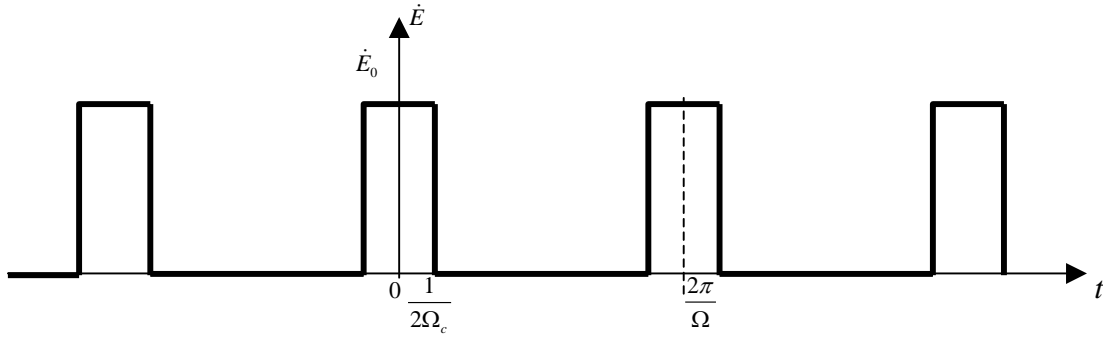


fig.8.16 : Emission d'énergie pour une orbite très excentrique

La durée d'émission d'énergie est donc :

$$\Delta t = \frac{1 \text{ rad}}{2\pi} T_{\text{circulaire}} = \frac{1}{\Omega_{\text{circulaire}}} = \sqrt{\frac{a^3 (1-e)^3}{\mathcal{M}}} \quad (8.113)$$

L'énergie émise par rayonnement gravitationnel en une orbite est alors, d'après (8.86) :

$$\Delta E = \int_0^T \dot{E} dt = \dot{E}_0 \cdot \Delta t = -\frac{32}{5} \frac{G^{7/2}}{c^5} \frac{\mu^2 \mathcal{M}^{5/2}}{a^{7/2} (1-e)^{7/2}} \quad (8.114)$$

L'objet compact ayant perdu de l'énergie, l'apoastre de l'orbite suivante sera moins éloigné de l'astre central, i.e. l'excentricité diminue : l'orbite tend peu à peu vers une orbite circulaire de rayon $a(1-e)$. Le nombre d'orbites nécessaire à la circularisation est grossièrement le nombre d'orbites nécessaires pour diviser le demi-grand axe par deux :

$$N \sim \frac{E_{2a} - E_a}{|\Delta E|} \sim \frac{1}{4} \frac{G\mathcal{M}\mu}{a|\Delta E|} \quad (8.115)$$

puisque $E_i = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{G\mathcal{M}\mu}{r_i} = -\frac{1}{2} \frac{G\mathcal{M}\mu}{r_i}$

Une durée caractéristique de la circularisation est la durée nécessaire pour diviser le demi grand axe par deux. La période orbitale étant $T \sim \sqrt{4\pi^2 a^3 / G\mathcal{M}}$, on détermine la durée caractéristique de circularisation τ :

$$\tau \sim N \cdot T \sim \frac{\pi}{2} \frac{\mu \sqrt{G\mathcal{M}a}}{|\Delta E|} \quad (8.116)$$

Entrons quelques valeurs numériques dans ces expressions :

$$\mathcal{M} = 3 \times 10^6 M_{\odot}, \mu = 10 M_{\odot}, r_{\text{périastre}} = 20\mathcal{M}, 1-e = 10^{-3} \quad (8.117)$$

On obtient alors

$$\Delta E \sim -10^{39} \text{ J} \quad N \sim 10^7 \quad \tau \sim 10^{12} \text{ s} \sim 10^5 \text{ ans} \quad (8.118)$$

Comparons avec la deuxième phase de cette capture : la spirale adiabatique circulaire étudiée au §1 et commençant à $a_0 = 20\mathcal{M}$ (expressions (8.93) et (8.100)) :

$$\frac{\tau_{\text{spirale}}}{\tau_{\text{ellipse}}} \sim 10^{-3} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta E_{\text{spirale}}}{E_{\text{ellipse}} - E_{\text{circulaire}}} \sim 10^{-3} \quad (8.119)$$

Le système passe donc la majeure partie de sa vie dans la phase « excentrique » et y émet la plus grande partie de l'énergie rayonnée totale. La fréquence est plus faible dans la phase « excentrique », mais la forme du signal indique qu'une grande partie de l'énergie est émise dans les harmoniques. En effet, la décomposition en série de Fourier du signal en créneau est :

$$\dot{E}(t) = \frac{32}{5} \frac{\mu^2 \mathcal{M}^{5/2}}{a^{7/2} (1-e)^{7/2}} \left\{ \frac{\Omega}{\pi \Omega_c} + \frac{1}{\pi} \sum_n \text{sinc} \left(\pi \frac{n\Omega}{2\pi \Omega_c} \right) \cos(n\Omega t) \right\} \quad (8.120)$$

La largeur à mi-hauteur de cette décomposition est :

$$n_{\text{LMH}} \sim \pi \frac{\Omega_c}{\Omega} = \frac{\pi}{(1-e)^{3/2}} \gg 1 \quad (8.121)$$

L'énergie est donc émise en grande partie dans des harmoniques de rang élevé : un détecteur conçu pour observer les derniers instants des spirales adiabatiques verra donc les signaux pollués (entre autres sources de bruit) par les harmoniques élevés de l'émission de binaires d'orbites très excentriques.

IV. DETECTION D'ONDES GRAVITATIONNELLES