

## CHAPITRE CINQ : INTRODUCTION A LA RELATIVITE GENERALE

version 1.4, 1/08

### I. GRAVITATION ET ESPACE-TEMPS COURBE

#### 1) Principe d'équivalence

Le principe d'équivalence est connu depuis Galilée : masse inerte ( $m$ ) et masse grave ( $m^*$ ) sont proportionnelles. La masse inerte intervient comme la résistance à l'accélération d'un corps dans la deuxième loi de Newton :

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

La masse grave intervient dans l'expression de la force de gravitation exercée sur l'objet lorsqu'il est dans un champ de gravitation  $\phi$  :

$$\mathbf{F}_g = -m^* \vec{\nabla} \phi$$

Ces deux masses ont donc des rôles très différents. En conséquence du principe d'équivalence, la chute d'un corps est indépendante de sa masse et de sa composition :

$$\mathbf{a} = -\vec{\nabla} \phi$$

Galilée pouvait démontrer cela dans le cas particulier de masses différentes mais de composition identiques. Nous pouvons décomposer par la pensée un bloc de 2kg de fer en deux blocs de 1kg liés par une ficelle de masse négligeable : la chute de chacun de ces blocs étant celle d'un bloc de 1kg, il est évident que deux kilogrammes de fer tombent comme 1kg de fer. Ce qui est beaucoup plus intrigant est que la chute d'un bloc de fer soit identique à celle d'un bloc de cuivre de même masse. Le principe d'équivalence peut être vu différemment. Plaçons un physicien dans une boîte sans ouverture, et donnons lui des masses afin qu'il puisse faire des expériences sur la chute des corps. Si la boîte est dans l'espace interstellaire, loin de tout corps massif, les masses flottent librement dans la boîte. Si elle est à la surface d'un astre, dans un champ de gravité, les masses tombent avec une accélération relative à la boîte égale à  $-\vec{\nabla} \phi$ . Si la boîte est dans l'espace interstellaire et accélère avec une accélération constante  $\mathbf{a}$  relativement à un référentiel inertiel, le physicien mesurera une accélération des masses  $-\mathbf{a}$  dans le référentiel non-galiléen de la boîte. Ainsi, il est impossible pour le physicien de distinguer localement (i.e. dans le volume de la boîte) les effets d'un champ de gravité de ceux d'une accélération constante.

Einstein extrapola de l'égalité entre masse grave et masse inerte le principe d'équivalence d'Einstein :

*Dans une région suffisamment petite de l'espace-temps, les lois de la physique se réduisent à celles de la relativité restreinte : il est impossible d'y détecter les effets d'un champ de gravitation.*

Nous verrons dans la suite les conclusions auxquelles mènent ce postulat.

#### 2) Force et gravitation : nécessité d'un espace-temps courbe

Avant d'étudier les mathématiques nécessaires à la formulation de la théorie de la relativité générale, nous pouvons montrer une conséquence de toute théorie basée sur le principe d'équivalence : la lumière est défléchiée par la présence d'un astre massif.

En effet, plaçons à nouveau un physicien dans une boîte en chute libre près de la surface d'un astre massif, mais laissons nous maintenant la possibilité de l'observer depuis la surface de l'astre en choisissant une boîte transparente. Donnons un laser au physicien. D'après le principe d'équivalence, si la boîte est suffisamment petite, les lois de la physique se réduisent pour lui à celles de la relativité

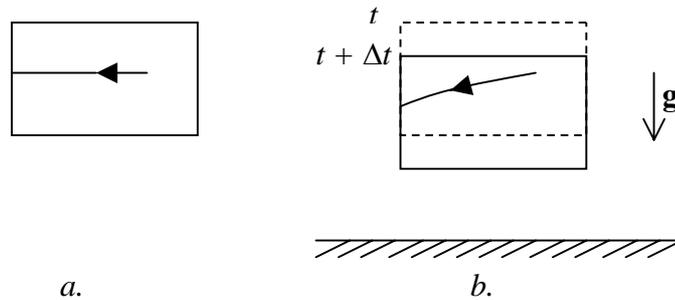


fig.5.1 : Expérience de pensée d'Einstein

(a) vue depuis la boîte en chute libre (b) vue depuis la surface de la planète

restreinte : il voit donc le rayon lumineux se propager en ligne droite. Pour un observateur fixe, debout à la surface de la planète, la boîte a bougé entre la date d'émission de la lumière  $t$  et celle de son arrivée à l'extrémité de la boîte  $t + \Delta t$  : une impulsion lumineuse frappe donc une paroi de la boîte plus bas qu'elle n'a émergé du laser. La lumière est défléchiée par la présence d'un champ gravitationnel (fig.5.1). Cette conclusion ne devrait pas surprendre : l'équivalence masse-énergie démontrée en relativité restreinte devrait l'avoir suggéré.

Au contraire de l'électromagnétisme, il n'existe pas de masse-énergie négative et donc pas d'objet physique gravitationnellement neutre par rapport auquel nous puissions mesurer une accélération due à la gravitation de manière absolue, afin d'en déduire la force gravitationnelle par la deuxième loi de Newton ou une éventuelle version améliorée de celle-ci. Cela n'est qu'une autre formulation du principe d'équivalence. En effet, s'il existait un objet gravitationnellement neutre, on pourrait détecter localement l'action d'un champ de gravitation en comparant le mouvement d'un objet massif à celui de cette référence. De telles considérations ont mené Einstein à adopter la vision selon laquelle la gravitation n'est pas une force mais une manifestation de l'espace-temps lui-même. Un corps en chute libre est alors considéré comme non-accélééré et suivant la géométrie de l'espace-temps. Einstein dut dès lors renoncer à l'espace-temps statique de Minkowski, et chercha à formuler une théorie d'un espace-temps *dynamique* dont les propriétés dépendent de son contenu en matière-énergie. La section suivante esquisse les mathématiques sous-jacentes à cette théorie.

## II. GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Il est vivement recommandé d'avoir lu le chapitre 2 avant d'aborder la géométrie différentielle.

### 1) Variétés différentiables réelles

Nous nous trouvons dans la même situation que des scientifiques du XV<sup>ème</sup> siècle, qui chercheraient à caractériser la géométrie de la Terre sans parti pris. Leur point de départ serait le fait expérimental suivant : *localement*, on peut caractériser la position d'un objet à sa surface par deux nombres associés à un système de coordonnées cartésien.

Pour caractériser la géométrie de l'espace-temps sans rien présupposer sur sa structure globale, nous partons donc du seul principe que, *localement* (et en chaque point), sa géométrie « ressemble » à l'espace-temps de Minkowski. On appellera un tel référentiel *référentiel inertiel local*. Cependant, à la différence de la Terre qui peut être considérée sphérique dans l'espace euclidien de dimension 3, l'espace-temps n'est pas, à ce que l'on en sait aujourd'hui, incorporé dans un espace euclidien de dimension supérieure à 4. Cela ne nous empêchera pas, pour mieux visualiser certaines situations, de représenter une « courbure » par une surface courbe dans  $\mathbb{R}^3$ , mais il faut bien se rappeler que ce n'est qu'une vue de l'esprit. L'espace-temps sera considéré en relativité générale comme une *variété différentiable* de dimension 4.

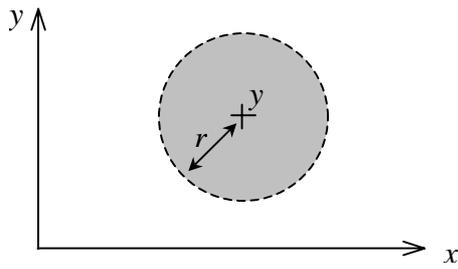


fig.5.2 : balle ouverte pour  $n = 2$

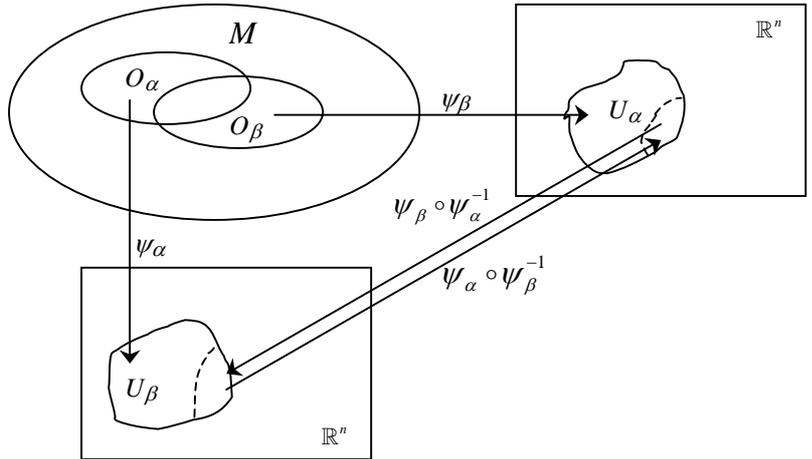


fig.5.3 : Variété différentiable et systèmes de coordonnées

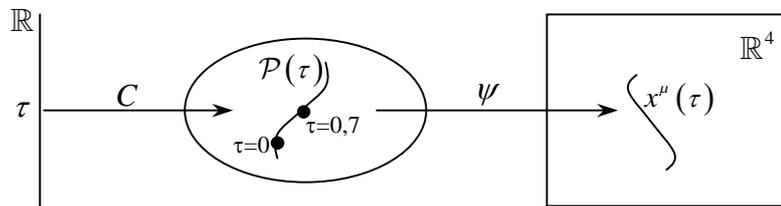


fig.5.4 : courbe  $\mathcal{P}(\tau)$

On introduit les applications  $\psi_\alpha : O_\alpha \rightarrow U_\alpha \in \mathbb{R}^4$  qu'on appelle *systèmes de coordonnées*, puisqu'elles permettent de repérer les points géométriques de la variété  $M$  par des nombres réels (voir fig.5.2). On demande à ces applications d'être bijectives lorsque les pièces se recouvrent de manière à pouvoir les décrire indifféremment par les deux systèmes de coordonnées.

Une *courbe* dans  $M$  est une application :

$$C : \mathbb{R} \rightarrow M$$

$$\tau \rightarrow \mathcal{P}(\tau)$$

(fig.5.4). Par exemple, le paramètre  $\tau$  peut être le temps propre de la particule  $P$ . La courbe  $\mathcal{P}(\tau)$  est alors la ligne d'univers de la particule, ayant pour coordonnées les  $\psi(\mathcal{P}(\tau)) = x^\mu(\tau)$ . Comme l'application  $\psi(\mathcal{P}(\tau))$  est une bijection, nous ne ferons plus de distinction de notation dans la suite entre la courbe  $\mathcal{P}(\tau)$  et son image  $\psi(\mathcal{P}(\tau))$  dans  $\mathbb{R}^4$ . Si la particule est un photon, on choisit le paramètre  $\zeta = \tau/m$ , en faisant tendre  $\tau$  et  $m$  vers zéro mais en gardant leur rapport fini.

### 2) Base naturelle

Si on introduit un système de coordonnées  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ , les points de  $\mathcal{P}(\tau)$  dans  $\mathbb{R}^4$  ont pour coordonnées  $x^\mu(\tau)$ . On peut choisir comme base dans  $\mathbb{R}^4$  une *base naturelle* :

$$\vec{e}_{\bar{\mu}} \equiv \left. \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x^\nu} \right|_{\nu \neq \mu} \tag{5.1}$$

où un vecteur pointe dans la direction de l'axe  $\mu$ , i.e. dans la direction où  $\mu$  augmente et où toutes les autres coordonnées restent constantes. Attention :  $\bar{\mu}$  ne désigne donc pas la  $\mu$ -ième composante du vecteur  $\vec{e}_{\bar{\mu}}$  mais sa direction, comme  $\mathbf{e}_x$  dans l'espace euclidien.

*Exemples :*

- Dans un espace à trois dimensions en coordonnées cartésiennes ( $\psi = (x, y, z)$ ), la base naturelle  $\{\mathbf{e}_{\bar{x}}, \mathbf{e}_{\bar{y}}, \mathbf{e}_{\bar{z}}\}$  s'identifie avec la base cartésienne orthonormée  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ . En effet, en tout point de la courbe  $\mathcal{P}(\tau)$  :

$$\mathbf{e}_{\bar{x}} = \left. \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x^i} \right|_{i \neq 1} = \frac{\partial (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z)}{\partial x} = \mathbf{e}_x$$

Les composantes de la métrique dans cette base naturelle sont donc simplement :

$$g_{ij} = \mathbf{g}(\mathbf{e}_{\bar{i}}, \mathbf{e}_{\bar{j}}) = \delta_{ij}$$

- Plaçons nous maintenant dans un plan, et choisissons les coordonnées polaires  $\psi = (\rho, \theta)$ . Calculons les composantes des vecteurs de la base naturelle correspondante au point  $\mathcal{P}(\rho, \theta)$  :

$$\mathbf{e}_{\bar{\rho}} = \left. \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho} \right|_{\theta} = \frac{\partial (\rho \cos \theta \mathbf{e}_x + \rho \sin \theta \mathbf{e}_y)}{\partial \rho} = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_{\rho}$$

$$\mathbf{e}_{\bar{\theta}} = \left. \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} \right|_{\rho} = \frac{\partial (\rho \cos \theta \mathbf{e}_x + \rho \sin \theta \mathbf{e}_y)}{\partial \theta} = -\rho \sin \theta \mathbf{e}_x + \rho \cos \theta \mathbf{e}_y = \rho \mathbf{e}_{\theta}$$

où  $\mathbf{e}_{\rho}$  et  $\mathbf{e}_{\theta}$  sont les vecteurs de la base polaire ordinaire. On constate donc que la longueur du vecteur  $\mathbf{e}_{\bar{\theta}}$  augmente proportionnellement à la distance à l'origine. Les composantes de la métrique sont :

$$g_{\theta\theta} = \mathbf{g}(\mathbf{e}_{\bar{\theta}}, \mathbf{e}_{\bar{\theta}}) = \rho^2 \quad g_{\rho\rho} = 1 \quad g_{\rho\theta} = g_{\theta\rho} = 0$$

Ce qui est bien en accord avec la métrique exprimée dans ces coordonnées comme un élément de longueur infinitésimal :

$$ds^2 = \mathbf{g}(d\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$$

- De même, la longueur des vecteurs de la base naturelle d'une 2-sphère de rayon  $R$  augmente avec le rayon (fig.5.5.) :

$$\mathbf{e}_{\bar{\varphi}} = \left. \frac{\partial \mathcal{P}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\theta} = R(-\sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_y) = R\mathbf{e}_{\varphi}$$

$$\mathbf{e}_{\bar{\theta}} = \left. \frac{\partial \mathcal{P}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right|_{\varphi} = R\mathbf{e}_{\theta}$$

Les composantes de la métriques sont donc :

$$g_{\theta\theta} = R^2 \quad g_{\varphi\varphi} = R^2 \sin^2 \theta \quad g_{\theta\varphi} = g_{\varphi\theta} = 0$$

Signalons dès à présent que, dans une variété différentiable quelconque, les vecteurs de la base naturelle ne seront plus forcément orthogonaux :  $g_{\mu\nu} \neq A(x^\sigma) \delta_{\mu\nu}$ , même si cela était le cas dans les exemples simples que nous venons de voir.

### 3) Vecteurs

Lorsque, comme pour la 2-sphère, la variété peut-être incorporée dans un espace euclidien de plus grande dimension, on peut définir naturellement l'espace vectoriel tangent au point  $P$  comme l'ensemble  $V_p$  des vecteurs tangents à la sphère en  $P$  (fig.5.6). Du fait de sa linéarité, on dit que  $V_p$  est « plat ».

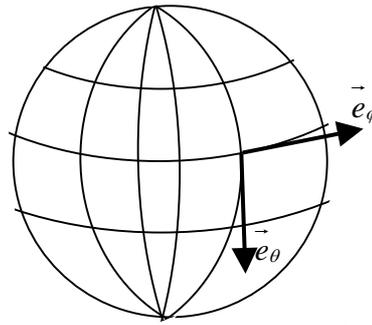


fig.5.5 : base naturelle sur une 2-sphère

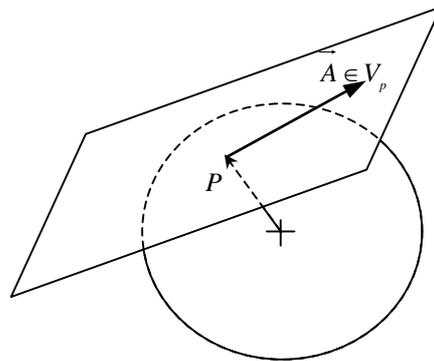


fig.5.6 : espace tangent au point P à la 2-sphère

*Exemple : vecteur vitesse*

Soit une particule se déplaçant sur sa ligne d'univers  $\mathcal{P}(\tau)$  (paramétrée par son temps propre  $\tau$ ) dans un espace-temps ayant la structure de  $S^2$ . Son vecteur vitesse  $\vec{u}$  est défini de la même manière qu'en relativité restreinte :

$$\vec{u} \equiv \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta\tau} = \frac{d}{d\tau} \mathcal{P}(\tau) \Rightarrow u^\mu = \frac{d}{d\tau} x^\mu \quad (5.2)$$

la deuxième relation étant obtenu si on introduit un système de coordonnées. Le vecteur de séparation  $\Delta\vec{P} \equiv \overline{P(\tau)P(\tau + \Delta\tau)}$  étant infinitésimal, il peut être considéré comme appartenant à la variété  $S^2$ . Mais le vecteur vitesse est obtenu en le divisant par l'infinitésimal  $\Delta\tau \rightarrow 0$  : il est « grand » et n'appartient plus à la variété différentielle (il « sort » de  $M$ ). Il appartient à l'espace tangent en  $P$  à  $S^2$ .

Généralisons : tout vecteur de  $V_p$  peut être considéré comme un vecteur tangent en  $P$  à une courbe  $\mathcal{P}(\zeta)$  de  $M$  passant par  $P$ . Développons dans la base naturelle les composantes d'un vecteur  $\vec{A}$  tangent à une courbe  $\mathcal{P}(\zeta)$ :

$$\vec{A} = \frac{d}{d\zeta} \mathcal{P}(\zeta) = \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta}}_{A^\mu} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{P}(\zeta)}{\partial x^\mu}}_{e_\mu}$$

Le terme de droite est une somme de dérivées partielles où  $e_\mu$  est la composante non-nulle du vecteur  $\vec{e}_\mu$  de la base naturelle. Comme nous utiliserons principalement la base naturelle dans la suite, nous ne ferons plus figurer la barre sur les indices.

Intéressons nous maintenant à la dérivée directionnelle de la courbe  $\mathcal{P}(\zeta)$  suivant le vecteur  $\vec{A}$  :

$$\partial_{\vec{A}} \mathcal{P}(\zeta) = A^\mu \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x^\mu} = \frac{d}{d\zeta} \mathcal{P}(\zeta) = \vec{A}$$

Il y a donc une correspondance univoque entre les concepts de vecteur et de dérivée directionnelle ; nous pouvons définir un vecteur comme une dérivée directionnelle :

$$\vec{A} \equiv \partial_{\vec{A}} \equiv \frac{d}{d\zeta} \mathcal{P} \equiv \frac{d}{d\zeta} \quad (5.3)$$

Les vecteurs sont alors vus comme des *opérateurs linéaires* que l'on applique à un point de l'espace temps. En particulier, pour les vecteurs de la base naturelle :

$$\vec{e}_{\bar{\mu}} = \left. \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x^{\nu}} \right|_{\nu \neq \mu} = \left. \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right|_{\nu \neq \mu} \equiv \partial_{\mu} \quad (5.4)$$

Ces vecteurs seront souvent notés  $\partial_{\mu}$  dans la suite. Par cette définition des vecteurs, nous nous affranchissons du caractère extrinsèque du vecteur défini à partir d'un espace  $\mathbb{R}^m$  de dimension supérieure à la dimension de la variété différentiable. Cette définition, apte à satisfaire les mathématiciens, ne nous empêchera pas de nous représenter mentalement les vecteurs comme des flèches.

Si on avait choisi un autre système de coordonnées  $\psi'$ , on aurait obtenu une autre base naturelle  $\vec{e}_{\mu'}$ . On passe d'une base naturelle à l'autre en utilisant la composition des dérivations :

$$e_{\mu} = \left. \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\mu}} \right|_{\mathcal{P}} e_{\nu'}$$

où  $x^{\nu'}$  sont les composantes du vecteur  $\psi' \circ \psi^{-1}$ . D'où la *loi de transformation des composantes d'un vecteur* lors d'un changement de coordonnées :

$$\begin{aligned} \vec{A} = \vec{A} &\Rightarrow A^{\nu'} e_{\nu'} = A^{\mu} e_{\mu} \Leftrightarrow A^{\mu} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\mu}} e_{\nu'} = A^{\mu} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\mu}} e_{\nu'} \\ &\Rightarrow \boxed{A^{\nu'} = A^{\mu} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\mu}}} \end{aligned} \quad (5.5)$$

les deux premières égalités provenant du fait que l'objet géométrique appartenant à la variété n'est pas affecté par un changement de coordonnées. Bien sûr, en physique, si l'on considère une transformation d'un référentiel inertiel à un autre, loin de tout corps massif, cette transformation se réduit à la transformée de Lorentz :

$$A^{\nu'} = A^{\mu} \Lambda^{\nu'}_{\mu}$$

Mais la relativité générale nous permettra justement de mener des calculs dans tout référentiel.

Enfin, le *commutateur*  $[\vec{A}, \vec{B}]$  de deux champs vectoriels  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  est défini dans une base naturelle par la relation :

$$[\vec{A}, \vec{B}] \equiv [\partial_{\vec{A}}, \partial_{\vec{B}}] = [A^{\mu} \partial_{\mu}, B^{\nu} \partial_{\nu}] = (A^{\mu} \partial_{\mu} B^{\nu} - B^{\mu} \partial_{\mu} A^{\nu}) \partial_{\nu} \quad (5.6)$$

C'est donc un opérateur qui doit agir sur un champ scalaire (tout comme en mécanique quantique). Nous pouvons déduire de (5.6) l'expression des composantes du commutateur dans n'importe quelle base :

$$[\vec{A}, \vec{B}]^{\nu} = (A^{\mu} \partial_{\mu} B^{\nu} - B^{\mu} \partial_{\mu} A^{\nu}) = (A^{\mu} B^{\nu}_{,\mu} - B^{\mu} A^{\nu}_{,\mu}) \quad (5.7)$$

#### 4) Vecteurs duaux, tenseurs

La définition d'un *vecteur dual* est inchangée par rapport à la relativité restreinte (voir Relativité Restreinte Chapitre 2). Si la base des vecteurs est  $\{\vec{e}_{\mu}\}$ , la base duale associée  $\{\vec{e}^{\mu}\}$  est définie par les relations :

$$\vec{e}^{\mu} \cdot \vec{e}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \quad (5.8)$$

Si on choisit la base naturelle  $\{\partial_\mu\}$  pour l'espace tangent, la base duale associée est notée  $\{dx^\nu\}$ . Si  $\omega_\mu$  indique les composantes d'un vecteur cotangent  $\bar{\omega}$  dans une base  $\{dx^\mu\}$ , elles deviennent par un changement de coordonnées :

$$\omega_{\mu'} = \omega_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}$$

(loi de transformation des vecteurs duaux).

Intéressons nous enfin au cas d'un tenseur de rang  $k, l$  :

$$\mathbf{T} \left( \underbrace{\_, \dots, \_}_{k \text{ fentes}}; \underbrace{\_, \dots, \_}_{l \text{ fentes}} \right) : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{k \text{ termes}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{l \text{ termes}} \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.9)$$

Les opérations « produit tensoriel » de deux tenseurs et « contraction d'une fente covariante et d'une fente contravariante », vues au chapitre 2 dans le cas de l'espace-temps plat de Minkowski, sont inchangées. Grâce à la possibilité de décomposer un tenseur en somme de tenseurs simples (i.e. en somme de produits tensoriels entre vecteurs et vecteurs duaux), les lois de transformation des vecteurs et des vecteurs duaux se généralisent pour obtenir la loi de transformation des tenseurs :

$$\boxed{T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}}} \quad (5.10)$$

### 5) Tenseur métrique

#### a. Définition

Nous ne modifions pas la définition du champ tensoriel métrique, défini par l'opération produit scalaire :

$$\mathbf{g}(\_, \_) : V_p \times V_p \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.11)$$

$$(\bar{A}, \bar{B}) \rightarrow \mathbf{g}(\bar{A}, \bar{B}) = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$\mathbf{g}$  est donc un tenseur symétrique ( $\mathbf{g}(\bar{A}, \bar{B}) = \mathbf{g}(\bar{B}, \bar{A})$ ) et non dégénéré ( $\mathbf{g}(\bar{A}, \bar{B}) = 0$  pour tout  $\bar{A}$  si et seulement si  $\bar{B}$  est nul). Ses composantes dans une base sont :

$$g_{\mu\nu} = \mathbf{g}(\bar{e}_\mu, \bar{e}_\nu) = \bar{e}_\mu \cdot \bar{e}_\nu$$

La différence fondamentale que nous rencontrerons par rapport à la relativité restreinte est que, les propriétés géométriques de l'espace-temps étant dictées par sont contenu en matière énergie, le champ métrique sera dans les équations d'Einstein une variable *dynamique*.

#### b. Manipulation des indices, notation abstraite des tenseurs

La métrique permet de passer de manière univoque d'un vecteur covariant (vecteur dual) à un vecteur contravariant (vecteur « habituel »). Les opérations d'élévation et d'abaissement des indices sont donc toujours possibles dans le cas d'une variété différentielle possédant une métrique :

$$g_{\alpha\mu} T^{\alpha\nu\rho} = T_\mu^{\nu\rho} \quad ; \quad g^{\alpha\mu} T_{\lambda\alpha}^{\nu\rho\sigma} = T_\lambda^{\mu\nu\rho\sigma} \quad \dots$$

Pouvant passer d'un tenseur de rang  $(k, l)$  à un autre tenseur de rang  $(k - 1, l + 1)$  ou  $(k + 1, l - 1)$  de manière univoque grâce à la métrique et à son inverse, nous choisissons de nommer tous ces tenseurs par le même symbole ( $\mathbf{T}$  dans l'exemple ci-dessus).

De plus, nous noterons souvent le tenseur  $\mathbf{T}$  par sa notation indicelle  $T^{\alpha\nu\rho}$  puisque, étant un objet géométrique, les équations écrites pour ses composantes dans un référentiel particulier resteront valables dans tout référentiel. Comme nous l'avons déjà vu, cette écriture allège considérablement l'écriture des formules et présente l'avantage de pouvoir vérifier que les expressions sont bien

cohérentes : mêmes indices non-muets de part et d'autre du signe « égal » et dans la même position (haute ou basse), sommation implicite uniquement entre indices répétés covariants et contravariants. Par exemple,  $S^{\mu\nu}T_{\mu\rho}{}^\sigma = R^{\nu\sigma}{}_\rho$  est une expression géométrique cohérente alors que  $S^{\mu\nu}T_{\mu\rho}{}^\sigma = R^\nu{}_{\sigma\rho}$  et  $S_{\mu\nu}T_{\mu\rho\sigma} = R_{\nu\sigma\rho}$  ne le sont pas. Dans la première, l'indice  $\sigma$  apparaît dans des positions différentes à gauche et à droite et, dans la deuxième, on a sommé sur un indice répété deux fois dans la même position.

c. Coordonnées normales de Riemann

On peut montrer que le nombre de signes + et - d'une métrique  $\mathbf{g}$  dans sa forme canonique est indépendant du choix de la base : c'est la *signature* de la métrique. Si tous les signes sont positifs, on parle de métrique riemanienne. Si il y a un signe négatif, il s'agit d'une métrique lorentzienne.

Pour toute métrique  $\mathbf{g}$ , on peut trouver une base *orthonormée*  $\{\bar{e}_{\hat{\mu}}\}$  de l'espace tangent au point  $P$  telle que la métrique soit mise sous la forme canonique  $g(\bar{e}_{\hat{\mu}}, \bar{e}_{\hat{\nu}}) = \pm\delta_{\mu\nu}$ , et que toutes les premières dérivées de la métrique s'annulent (*Coordonnées Normales de Riemann*, ou *CNRs*). Ceci correspond, physiquement, à la possibilité de se placer *localement* dans les conditions où les lois de la physique se réduisent à celle de la relativité restreinte (principe d'équivalence).

Montrons que le passage aux coordonnées normales de Riemann est possible dans le cas d'une métrique lorentzienne dans une variété différentiable de dimension 4.

Développons l'ancienne coordonnée en série de Taylor, en fonction des coordonnées normales de Riemann recherchées  $x^{\mu'}$  :

$$x^\mu(x^{\mu'}) = \left. \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \right|_P x^{\mu'} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\mu'_2}} \right|_P x^{\mu'_1} x^{\mu'_2} + \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 x^\mu}{\partial x^{\mu'_1} \partial x^{\mu'_2} \partial x^{\mu'_3}} \right|_P x^{\mu'_1} x^{\mu'_2} x^{\mu'_3} + \dots$$

où on a choisi par simplicité les origines telles que  $x^\mu(P) = x^{\mu'}(P) = 0$ .

Développons maintenant la métrique, dans les RNCs et autour du point  $P$  (en notations très simplifiées et en omettant les facteurs numériques <sup>1</sup>) :

$$\begin{aligned} g' &= g'|_P + \partial' g'|_P x' + \partial' \partial' g'|_P x' x' + \dots \\ &= \left. \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial x'} \right|_P g + \left( \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial^2 x}{\partial x' \partial x' \partial x'} g + \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial x'} \partial' g \right)_P x' \\ &\quad + \left( \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial^3 x}{\partial x' \partial x' \partial x' \partial x'} g + \frac{\partial^2 x}{\partial x' \partial x'} \frac{\partial^2 x}{\partial x' \partial x'} g + \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial^2 x}{\partial x' \partial x' \partial x'} \partial' g + \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial x'} \partial' \partial' g \right)_P x' x' \end{aligned} \tag{5.12}$$

où, dans la deuxième égalité, nous avons utilisé la loi de transformation de la métrique :

$$g_{\mu' \nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu}$$

Dans cette expression, nous pouvons évaluer terme à terme les facteurs de même ordre en  $x'$ .

Les termes d'ordre 0 ( $g_{\mu' \nu'}$ , 10 nombres puisque la métrique est symétrique) sont déterminés par les 16 nombres de la matrice  $4 \times 4$   $(\partial x^\mu / \partial x^{\mu'})_P$ . Les degrés de libertés sont donc suffisants pour pouvoir écrire la métrique dans sa forme canonique (mais on ne peut pas changer sa signature) et pour qu'il reste les six degrés de liberté correspondant aux 6 paramètres du groupe de Lorentz (que l'on sait ne pas modifier la forme canonique).

Au premier ordre apparaissent à gauche les dérivées  $\partial_{\alpha'} g_{\mu' \nu'}$  : 4 dérivées de 10 nombres, soit 40 nombres. A droite, nous avons maintenant la liberté de choisir les  $(\partial^2 x^\mu / \partial x^{\mu'_1} \partial x^{\mu'_2})_P$  : 4 choix pour  $\mu$

---

<sup>1</sup> La première ligne s'écrirait plus rigoureusement :  $g_{\mu' \nu'} = g_{\mu' \nu'}|_P + \left. \frac{\partial g_{\mu' \nu'}}{\partial x^{\sigma'}} \right|_P x^{\sigma'} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 g_{\mu' \nu'}}{\partial x^{\sigma'} \partial x^{\rho'}} \right|_P x^{\sigma'} x^{\rho'} + \dots$

et 10 choix pour  $(\mu_1, \mu_2)$  puisque les dérivées partielles commutent, soit exactement les 40 possibilités nécessaires pour annuler les premières dérivées de  $\mathbf{g}$ . La métrique de l'espace-temps ayant une signature  $(-+++)$ , au *premier ordre*, la métrique exprimée dans les CNRs a donc la forme de la métrique de Minkowski :

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où  $\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_0 = -1$  et  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = +\delta_{ij}$ . Plaçons nous dans les CNRs, et injectons dans les deux fentes de  $\mathbf{g}$  un vecteur infinitésimal  $\delta\vec{P} = (\delta x^0, \delta x^1, \delta x^2, \delta x^3)$  de la variété différentielle :

$$\mathbf{g}(\delta\vec{P}, \delta\vec{P}) = g_{\mu\nu} \delta P^\mu \delta P^\nu$$

Si  $\delta\vec{P}$  est de type « temps », il est tangent en  $P$  à une ligne d'univers et on a  $\delta\vec{P}^2 = -\Delta\tau^2$  où  $\tau$  est le temps propre mesuré dans le référentiel local inertiel de la particule. De même, si  $\delta\vec{P}$  est de type « espace », il est tangent en  $P$  à une ligne de simultanéité et  $\delta\vec{P}^2 = \Delta s^2$ . Localement, nous pouvons ainsi retrouver toute la relativité restreinte, conformément au principe d'équivalence.

Enfin, considérons le deuxième ordre de (5.12). A gauche apparaissent les dérivées  $\partial_\alpha \partial_{\beta'} g_{\mu\nu}$  : 10 dérivées de 10 composantes, soit 100 coefficients. Nous avons, à droite, la liberté de choisir les  $(\partial^3 x^\mu / \partial x^{\mu_1} \partial x^{\mu_2} \partial x^{\mu_3})_p$  pour nous placer dans les CNRs : 4 choix pour  $\mu$  et  $K_4^3 = 6! / (3!)^2 = 20$  pour  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  (combinaisons de 3 parmi 4 avec répétitions :  $K_n^p = C_{n+p-1}^{n-1}$ ). Il manque donc 20 degrés de liberté pour fixer nuls les coefficients de la métrique dans les CNRs. Ils correspondent aux 20 composantes du tenseur de Riemann qui contient l'information locale sur la courbure de l'espace-temps (voir section suivante). Localement, les informations sur la courbure de l'espace-temps apparaissent donc dans les dérivées secondes de la métrique.

*Exemple :*

Revenons à la géométrie de la Terre. Un point de la surface de la Terre est repéré par ses coordonnées angulaires  $(\theta, \varphi)$  (fig.5), et sa courbure est indiquée par la métrique exprimée sous forme d'élément de longueur infinitésimal :

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

$$(g_{\theta\theta} = R^2 ; g_{\varphi\varphi} = R^2 \sin^2 \theta ; g_{\theta\varphi} = g_{\varphi\theta} = 0)$$

Plaçons nous dans une base orthonormée afin de caractériser cette position par deux distances mesurées par rapport à un point origine situé sur l'équateur ( $\theta = \pi/2, \varphi = 0$ ) :

$$x \equiv R(\theta - \pi/2) ; y \equiv R\varphi$$

Les composantes de la métrique et l'élément de longueur deviennent :

$$g_{xx} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 g_{\theta\theta} = 1 \quad g_{yy} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 g_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta = \cos^2\left(\frac{x}{R}\right) \quad g_{xy} = 0$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \cos^2(x/R) = dx^2 + dy^2 + \mathcal{O}(x^2/R^2)$$

Donc, *localement* (i.e. lorsque  $x \ll R$ ), la métrique est euclidienne et ses premières dérivées sont nulles :

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \mathcal{O}(x^2/R^2) \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_i} = \mathcal{O}(x/R) \quad (5.13)$$

Les informations sur la courbure se retrouvent dans les deuxièmes dérivées de la métrique. Si, par contre, des expériences visant à mettre en évidence cette courbure (par exemple par la mesure de la somme des angles d'un triangle) se déroulent sur des distances comparables au rayon de la Terre, on pourra mettre en évidence des écarts à la métrique euclidienne de l'ordre de  $x^2/R^2$  :

$$\Delta g_{ij} = g_{ij} - \delta_{ij} \sim x^2/R^2 \quad (5.14)$$

### III. COURBURE

#### 1) Connexion en espace euclidien

Avant de pouvoir faire de la physique en espace-temps courbe, il nous reste à trouver un moyen de formuler des équations différentielles lorsque la structure de l'espace-temps est dynamique. Avant d'aborder le problème dans sa généralité, examinons un exemple bien connu en géométrie euclidienne. Dans tout ce paragraphe, nous placerons tous les indices en position basse puisque la métrique euclidienne est simplement  $g_{ij} = \delta_{ij}$ .

Nous avons mentionné dans la partie Relativité Restreinte que, même dans l'espace euclidien, lorsque la base utilisée n'est pas la base cartésienne, le gradient  $\vec{\nabla} \mathbf{T}$  d'un tenseur  $\mathbf{T}$  ne se résume pas à l'utilisation de dérivées partielles :

$$\nabla_k T_i = T_{i;k} \neq T_{i,k}$$

Cela est dû au fait qu'on ne peut pas simplement comparer les composantes d'un tenseur en deux points différents de l'espace puisque les vecteurs de la base  $\mathbf{y}$  sont différents. On a en fait, en appliquant les règles de différentiation (avec  $\vec{\nabla}_k \equiv \vec{\nabla}_{\mathbf{e}_k}$ ) :

$$\vec{\nabla}_k \mathbf{A} = \vec{\nabla}_k (A_j \mathbf{e}_j) = (\nabla_k A_j) \mathbf{e}_j + A_j (\vec{\nabla}_k \mathbf{e}_j) = A_{j;k} \mathbf{e}_j + A_j \Gamma_{ijk} \mathbf{e}_i \quad (5.15)$$

où on a défini

$$\vec{\nabla}_k \mathbf{e}_j \equiv \Gamma_{ijk} \mathbf{e}_i \Leftrightarrow \Gamma_{ijk} \equiv (\vec{\nabla}_k \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_i \quad (5.16)$$

Les  $\Gamma_{ijk}$  sont appelés les *coefficients de la connexion* car ils reflètent la manière dont deux points de l'espace sont « connectés » entre eux dans la base considérée (ils sont aussi appelés coefficients de Christoffel). Ils portent l'information de « l'incidence sur  $x_i$  de la variation de  $\mathbf{e}_j$  lors d'un déplacement dans la direction de  $\mathbf{e}_k$  ». Il est facile de voir qu'ils sont tous identiquement nuls en coordonnées cartésiennes et que l'on retrouve donc bien :

$$A_{i;k} = A_{i,k} \quad (\text{coordonnées cartésiennes})$$

Noter dès à présent le placement des indices dans les symboles  $\Gamma$  : l'indice de dérivation est toujours en dernière position. En prenant le produit scalaire de (5.15) avec  $\mathbf{e}_i$ , on voit que la composante  $i$  du gradient de  $\mathbf{A}$  s'écrit :

$$A_{i;k} = A_{i,k} + \Gamma_{ijk} A_j \quad (5.17)$$

En effet, la base étant orthonormée,  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_m = \delta_{im}$ . Toujours grâce à l'orthonormalité de la base, nous avons  $\nabla_k (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = 0$ , soit  $(\vec{\nabla}_k \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j + (\vec{\nabla}_k \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_i = 0$ . En comparant à la définition (5.16), les coefficients de la connexion sont donc antisymétriques dans leurs deux premiers indices :

$$\Gamma_{jik} = -\Gamma_{ijk} \quad (5.18)$$

Cette symétrie ne sera plus valable par la suite, lorsque nous considérerons des bases non-orthonormées.

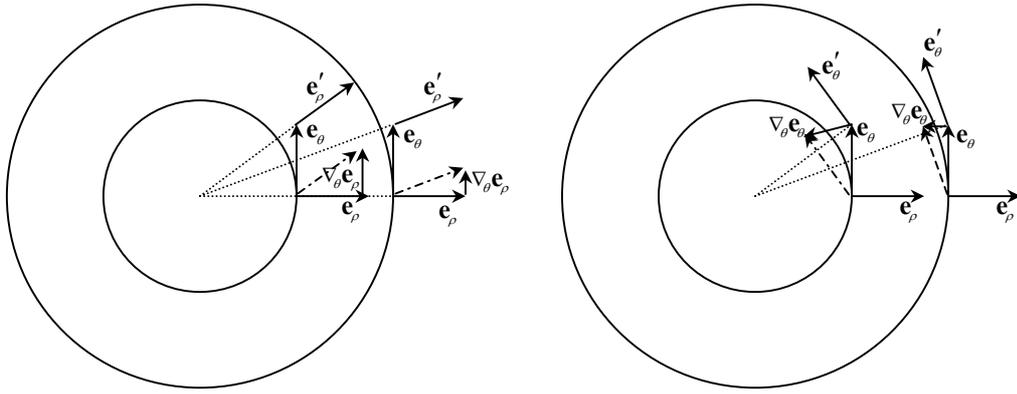


fig.5.7. : Gradients des vecteurs de la base naturelle en coordonnées polaires

Exemples :

- Les coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, Z)$  sont définies, par rapport aux coordonnées cartésiennes, par les relations :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \arctan(y/x) \quad Z = z \quad (5.19)$$

Les vecteurs de la base polaire sont donc :

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{e}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{e}_y \quad \mathbf{e}_\theta = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{e}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{e}_y \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \quad (5.20)$$

Appliquons la définition (5.16) des coefficients de la connexion. Les seuls gradients non-nuls des vecteurs  $\mathbf{e}_i$  sont  $\vec{\nabla}_\theta \mathbf{e}_\rho$  et  $\vec{\nabla}_\theta \mathbf{e}_\theta$ . On obtient donc :

$$\Gamma_{i\rho\theta} = \mathbf{e}_i \cdot (\vec{\nabla}_\theta \mathbf{e}_\rho) \quad \text{et} \quad \Gamma_{i\theta\theta} = \mathbf{e}_i \cdot (\vec{\nabla}_\theta \mathbf{e}_\theta)$$

On peut facilement trouver l'expression des gradients des vecteurs de la base en s'aidant de schémas (fig.5.7). On évalue par exemple  $\vec{\nabla}_\theta \mathbf{e}_\rho$  en traçant les vecteurs de la base en un point, en se déplaçant le long de  $\mathbf{e}_\theta$  jusqu'à son extrémité et en traçant le nouveau vecteur  $\mathbf{e}_{\rho'}$ . Le vecteur  $\mathbf{e}_{\rho'} - \mathbf{e}_\rho$  donne une estimation de  $\vec{\nabla}_\theta \mathbf{e}_\rho$  (bien sûr, un vrai gradient s'obtiendrait en se déplaçant de  $\varepsilon \mathbf{e}_\theta$ , en divisant par  $\varepsilon$  puis en prenant la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ ). On constate que ce gradient est suivant  $\mathbf{e}_\theta$ . En répétant cette opération une deuxième fois pour une coordonnée  $\rho$  différente, on constate que la gradient diminue lorsque l'on s'éloigne de l'origine. On a donc :

$$\vec{\nabla}_\theta \mathbf{e}_\rho = \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\theta \quad \text{d'où} \quad \Gamma_{\theta\rho\theta} = \frac{1}{\rho} \quad \text{et} \quad \Gamma_{i\rho\theta} = 0 \quad (i \neq \theta)$$

De même (fig.5.7.), on obtient :

$$\vec{\nabla}_\theta \mathbf{e}_\theta = -\frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho \quad \text{d'où} \quad \Gamma_{\rho\theta\theta} = -\frac{1}{\rho} \quad \text{et} \quad \Gamma_{i\theta\theta} = 0 \quad (i \neq \rho)$$

ce qui aurait aussi pu se déduire de l'antisymétrie des coefficients de la connexion. Tous les autres coefficients sont identiquement nuls.

- Les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  sont définies, par rapport aux coordonnées cartésiennes, par les relations :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \theta = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Les vecteurs de la base sphérique sont, exprimés en coordonnées cartésiennes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_r = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{e}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{e}_y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\theta = \frac{zx}{\sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)}} \mathbf{e}_x + \frac{zy}{\sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)}} \mathbf{e}_y - \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\phi = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{e}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{e}_y \end{array} \right.$$

D'après les résultats obtenus en coordonnées cylindriques, il vient immédiatement en considérant les projections de la base sphérique dans les plans  $\phi = \text{cte}$  et  $\theta = \text{cte}$  :

$$\Gamma_{\theta r \theta} = \Gamma_{\phi r \phi} = \frac{1}{r}$$

Les seuls coefficients de la connexion qui ne se déduisent pas simplement des coefficients de la base cylindrique et des considérations de symétrie sont ceux qui font intervenir les deux angles. Pour évaluer  $\nabla_\phi \mathbf{e}_\theta$ , nous pouvons tracer deux schémas en projection, similaires aux précédents, pour étudier l'influence des variations de  $r$  et  $\theta$  sur le gradient. Le gradient est suivant  $\mathbf{e}_\phi$ , il varie en  $1/\rho = 1/r \sin \theta$  lorsqu'on s'éloigne de l'origine, et varie en  $\cos \theta$  lorsqu'on effectue une rotation de  $\theta$  (gradient maximal lorsque  $\theta$  est nul et minimal lorsque  $\theta = \pi/2$ ). On obtient donc :

$$\Gamma_{\phi \theta \phi} = \frac{\cot \theta}{r}$$

Les coefficients qui ne sont pas reliés par symétrie à ceux dont la valeur est donnée ici sont identiquement nuls.

On peut calculer, à l'aide de la connexion, les gradients dans tout système de coordonnées, et retrouver ainsi les formules maintes fois utilisées en électromagnétisme et en mécanique quantique.

*Exemple : Divergence en coordonnées sphériques*

La divergence d'un champ de vecteurs  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  se calcule à l'aide de (5.17), la virgule de  $A_{i,j}$  signifiant « dérivée directionnelle de la composante  $A_i$  suivant  $\mathbf{e}_j$  » :

$$\begin{aligned} A_{i,i} &= A_{r,i} + \Gamma_{iji} A_j \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + 0 + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \Gamma_{\theta r \theta} A_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \Gamma_{\phi r \phi} A_r + \Gamma_{\phi \theta \phi} A_\theta \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} A_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r} A_r + \frac{\cot \theta}{r} A_\theta \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) A_r + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} \right) A_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \end{aligned}$$

## 2) Connexion en espace-temps courbe

Dans un espace-temps courbe, les mêmes considérations s'appliquent dans tout système de coordonnées puisque les vecteurs de la base varient en fonction du point de l'espace-temps considéré. On définit donc le gradient  $\nabla \vec{A}$  d'un champ vectoriel  $\vec{A}$  par la généralisation :

$$A^{\mu}_{;\nu} = A^{\mu}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} A^{\rho} \quad (5.21)$$

avec, par analogie avec (5.16) :

$$\bar{\nabla}_{\nu} \bar{e}_{\rho} \equiv \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} \bar{e}_{\mu} \quad (5.22)$$

où les positions hautes et basses des indices sont agencées de manière à obtenir une expressions cohérente. Mais, la métrique elle-même étant dynamique, de petits schémas ne suffiront plus pour deviner les expressions des coefficients de la connexion.

La relation de dualité entre les bases (5.8) implique :

$$\bar{\nabla}_{\rho} (\bar{e}^{\mu} \cdot \bar{e}_{\nu}) = 0 \Rightarrow (\bar{\nabla}_{\rho} \bar{e}^{\mu}) \cdot \bar{e}_{\nu} + \bar{e}^{\mu} \cdot (\bar{\nabla}_{\rho} \bar{e}_{\nu}) = 0$$

soit

$$(\bar{\nabla}_{\rho} \bar{e}^{\mu}) \cdot \bar{e}_{\nu} = -\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} \quad (5.23)$$

(5.21) se généralise donc pour des composantes contravariantes :

$$A_{\mu;\nu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} A_{\rho} \quad (5.24)$$

Finalement, on peut se convaincre que les composantes du gradient d'un tenseur s'écrivent :

$$T^{\mu\nu}_{\rho;\lambda} = T^{\mu\nu}_{\rho,\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} T^{\sigma\nu}_{\rho} + \Gamma^{\nu}_{\sigma\lambda} T^{\mu\sigma}_{\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\rho\lambda} T^{\mu\nu}_{\sigma} \quad (5.25)$$

Nous voilà donc capables de dériver un champ tensoriel, à condition que nous puissions calculer les coefficients de la connexion. Le gradient d'un tenseur est lui-même un tenseur, contrairement à la simple dérivée directionnelle.

### 3) Mouvement géodésique

En relativité restreinte, un corps n'étant soumis à aucune force se déplace en mouvement rectiligne uniforme. On a alors :

$$\bar{\nabla}_{\bar{u}} \bar{u} = 0 \Leftrightarrow u^{\mu}_{;\nu} u^{\nu} = 0 \quad (5.26)$$

(la vitesse étant une constante vectorielle, sa dérivée directionnelle suivant elle-même est nulle). Cette relation pourrait s'écrire  $u^{\mu}_{;\nu} u^{\nu} = 0$  en relativité restreinte et en coordonnées cartésiennes. En relativité générale, (5.26) reste vraie puisque d'après le principe d'équivalence, dans un référentiel inertiel local, les effets de la gravitation ne sont pas détectables au premier ordre. Et, comme cette équation est une relation entre objets géométriques ( $\bar{\nabla} \bar{u}$  étant un tenseur), elle doit être valable dans tout référentiel.

On peut donc immédiatement généraliser la notion de droite à un espace-temps courbe par la « promotion » de la dérivée partielle au gradient, de même qu'on pourra généraliser la plupart des équations de la physique de la relativité restreinte à la relativité générale sans ambiguïté.

La ligne d'univers d'une particule non-accélérée (i.e. soumise uniquement à la gravitation) est alors une « droite généralisée » appelée *géodésique*. L'équation d'une géodésique est :

$$\bar{\nabla}_{\bar{u}} \bar{u} = 0 \Leftrightarrow u^{\mu}_{;\nu} u^{\nu} = 0 \quad (5.27)$$

L'équation des géodésiques peut s'écrire, d'après les résultats du paragraphe précédent :

$$u^{\mu}_{;\nu} u^{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} u^{\rho} u^{\nu} = 0 \quad (5.28)$$

On peut réécrire cette expression en fonction des coordonnées :

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left( \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \right) \times \frac{dx^{\nu}}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} \frac{dx^{\rho}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0 \quad (5.29)$$

le temps propre étant lié à l'intervalle par la relation :  $d\tau^2 = -ds^2 = -\eta_{\alpha\beta} \xi^{\alpha} \xi^{\beta}$ . Or  $\partial x^{\mu} / \partial x^{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$ , d'où finalement :

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} \frac{dx^{\rho}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0 \quad (5.30)$$

Equation qui généralise la seconde loi de Newton pour  $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$ .

Bien sûr, l'équation des géodésiques n'est pas d'une folle utilité tant que nous ne savons pas calculer les coefficients de la connexion. Notons pour cela que, dans un référentiel inertiel, la trajectoire rectiligne d'une particule matérielle peut s'écrire :

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (5.31)$$

Considérons maintenant un autre système de coordonnées  $\{x^\mu\}$ . Dans une base naturelle, les relations  $\xi^\alpha(x^\mu)$  permettent d'écrire (5.31) sous la forme :

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \xi^\alpha = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (5.32)$$

que l'on multiplie par  $\partial x^\rho / \partial \xi^\alpha$  :

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (5.33)$$

En identifiant avec (5.30) on obtient l'expression des coefficients de la connexion :

$$\Gamma^\mu_{\rho\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\nu} \quad (5.34)$$

et l'on voit immédiatement qu'ils sont symétriques dans leurs deux derniers indices. Il nous reste à exprimer ces coefficients en fonction de la métrique afin de les relier fermement à la structure géométrique de l'espace-temps. La métrique  $\mathbf{g}$  s'écrit en fonction des coordonnées inertielles, d'après la loi de transformation des tenseurs (5.10) :

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (5.35)$$

En dérivant par rapport à  $x^\rho$  :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu,\rho} &= \eta_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\rho} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \right) = \eta_{\alpha\beta} \left( \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \right) \\ &= \Gamma^\lambda_{\nu\rho} g_{\lambda\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho} g_{\lambda\nu} = \Gamma_{\mu\nu\rho} + \Gamma_{\nu\mu\rho} \end{aligned}$$

d'après (5.34) et (5.35). Dans la dernière égalité, nous avons défini les coefficients covariants obtenus en baissant les indices des coefficients à l'aide de la métrique. Remarquons maintenant que, grâce à la symétrie des deux derniers indices :

$$g_{\mu\nu,\rho} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\rho\mu,\nu} = \Gamma_{\mu\nu\rho} + \Gamma_{\nu\mu\rho} + \Gamma_{\rho\nu\mu} + \Gamma_{\nu\rho\mu} - \Gamma_{\rho\mu\nu} - \Gamma_{\mu\rho\nu} = 2\Gamma_{\nu\mu\rho}$$

Nous avons donc finalement, en renommant les indices :

$$\begin{cases} \Gamma_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} (g_{\mu\nu,\rho} + g_{\rho\mu,\nu} - g_{\rho\nu,\mu}) \\ \Gamma^\mu_{\nu\rho} = g^{\mu\sigma} \Gamma_{\sigma\nu\rho} \end{cases} \quad (5.36)$$

Bien noter le placement des indices. Rappelons que ces expressions sont valables dans une base naturelle seulement.

*Exemple : Connexion sur une 2-sphère*

La métrique d'une 2-sphère de rayon  $R$  exprimée comme un élément de longueur est :

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Soit

$$g_{\theta\theta} = R^2 \quad \text{et} \quad g_{\phi\phi} = R^2 \sin^2 \theta$$

Les coefficients de la connexion sont donc ( $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 1$ ) :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\phi\phi\phi} = \Gamma_{\theta\theta\theta} = \Gamma_{\theta\theta\phi} = \Gamma_{\theta\phi\theta} = \Gamma_{\phi\theta\theta} = 0 & \Rightarrow \Gamma^{\phi}_{\phi\phi} = \Gamma^{\theta}_{\theta\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta\phi} = \Gamma^{\theta}_{\phi\theta} = \Gamma^{\phi}_{\theta\theta} = 0 \\
 \Gamma_{\theta\phi\phi} = -\frac{1}{2}g_{\phi\phi,\theta} = -R^2 \cos\theta \sin\theta & \Rightarrow \Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = g^{\theta\theta}\Gamma_{\theta\phi\phi} = -\cos\theta \sin\theta \\
 \Gamma_{\phi\theta\theta} = \Gamma_{\phi\theta\phi} = \frac{1}{2}g_{\phi\phi,\theta} = R^2 \cos\theta \sin\theta & \Rightarrow \Gamma^{\phi}_{\theta\theta} = \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = g^{\phi\phi}\Gamma_{\phi\theta\theta} = \cot\theta
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

L'équation des géodésiques mène a un système d'équations différentielles peu sympathique, mais nous verrons qu'heureusement on peut souvent se passer de le résoudre.

Une conséquence très importante de l'équation des géodésiques est l'existence de quantités conservées. Elle a tout d'abord le bon goût d'assurer la conservation de la norme de l'impulsion d'une particule suivant une géodésique

$$\vec{p} = m\vec{u} = m \frac{d}{d\tau} = \frac{d}{d\zeta} \quad \text{avec} \quad \zeta \equiv \tau/m$$

(l'introduction de la nouvelle variable  $\zeta$  permet de définir l'impulsion d'un photon en faisant tendre  $\tau$  et  $m$  vers zéro tout en gardant leur rapport fini). En effet :

$$\vec{\nabla}_{\vec{p}}(\vec{p} \cdot \vec{p}) = 2\vec{p} \cdot \nabla_{\vec{p}}\vec{p} = 0$$

d'après (5.27). De plus, supposons que la métrique ne dépende pas d'une coordonnée  $x^a$  (i.e.  $g_{\alpha\beta,a} = 0$ ). L'équation des géodésiques exprimée en fonction de la composante covariante du vecteur impulsion est :

$$p_{\alpha;\gamma}p^{\gamma} = p_{\alpha,\gamma}p^{\gamma} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}p_{\beta}p^{\gamma} = \frac{dx^{\gamma}}{d\zeta} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} p_{\alpha} - \Gamma_{\beta\alpha\gamma}p^{\beta}p^{\gamma} = 0$$

Soit

$$\frac{d}{d\zeta} p_{\alpha} - \frac{1}{2}(g_{\beta\alpha,\gamma} + g_{\gamma\beta,\alpha} - g_{\gamma\alpha,\beta})p^{\beta}p^{\gamma} = 0$$

dans une base naturelle. Si on fait  $\alpha = a$ , on obtient :

$$\frac{d}{d\zeta} p_a - \frac{1}{2}(g_{\beta a,\gamma} - g_{\gamma a,\beta})p^{\beta}p^{\gamma} = 0$$

Le deuxième terme étant nul puisque chaque terme positif  $(\beta,\gamma)$  de la somme implicite est compensé par le terme négatif  $(\gamma,\beta)$ , on voit finalement que, si la métrique ne dépend pas de la coordonnée  $x^a$ , alors la composante covariante de l'impulsion  $p_a$  d'une particule est conservée au cours de son mouvement géodésique :

$$g_{\alpha\beta,a} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\zeta} p_a = 0 \tag{5.38}$$

#### 4) Déviation des géodésiques, tenseur de courbure

Considérons deux géodésiques proches, le long desquelles se déplacent deux particules tests A et B dont la vitesse relative est nulle à l'instant initial (i.e. leurs vecteurs tangents sont initialement « parallèles »). Nous cherchons à montrer comment la courbure de l'espace-temps les fait dévier l'une de l'autre, ce qui revient à chercher une expression de leur accélération relative.

Pour quantifier cette situation, paramétrons les deux géodésiques par le temps propre  $\tau$  des particules tests qui les suivent, et imaginons une famille continue de géodésiques (soit une 3-surface) qui contient les géodésiques A et B, paramétrée par un paramètre  $\lambda$  avec  $\lambda_A = 0$  et  $\lambda_B = 1$ .

Choisissons  $\tau_A = \tau_B = 0$  sur une même 3-surface spatiale. Le champ vectoriel déplacement, purement spatial, séparant deux géodésiques, est :

$$\vec{\xi}(\tau) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{\tau} \quad (5.39)$$

où l'on prend  $\lambda = 0$  pour obtenir la séparation entre les géodésiques A et B ( (5.39) est le premier terme d'un développement en série du champ vectoriel, nous supposons donc que ce déplacement est petit). Le champ vectoriel « vecteur tangent à la géodésique  $\lambda$  » n'est autre que la 4-vitesse de la particule s'y déplaçant :

$$\vec{u}(\lambda) = \frac{\partial}{\partial \tau} \Big|_{\lambda} \quad (5.40)$$

La vitesse relative des deux particules à l'instant initiale est nulle par hypothèse :

$$\vec{\nabla}_{\vec{u}} \vec{\xi} = 0 \quad (5.41)$$

et nous cherchons à calculer leur accélération relative, i.e.  $\vec{\nabla}_{\vec{u}} \vec{\nabla}_{\vec{u}} \vec{\xi}$  évaluée à  $\lambda = 0$ . Pour cela, notons d'abord que, d'après leur définitions, les champs vectoriels  $\vec{\xi}$  et  $\vec{u}$  commutent :

$$[\vec{\xi}, \vec{u}] = \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \vec{u} - \vec{\nabla}_{\vec{u}} \vec{\xi} = 0 \quad (5.42)$$

On a donc :

$$\vec{\nabla}_{\vec{u}} \vec{\nabla}_{\vec{u}} \vec{\xi} = \vec{\nabla}_{\vec{u}} \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \vec{u} = \left( \vec{\nabla}_{\vec{u}} \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} - \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \vec{\nabla}_{\vec{u}} \right) \vec{u} \quad (5.43)$$

où l'on a ajouté un terme nul en vertu de l'équation des géodésiques. En réécrivant cette équation en notation indicielle :

$$\begin{aligned} \left( \xi^\alpha{}_{;\beta} u^\beta \right)_{;\gamma} u^\gamma &= \left( u^\alpha{}_{;\beta} \xi^\beta \right)_{;\gamma} u^\gamma - \left( u^\alpha{}_{;\beta} u^\beta \right)_{;\gamma} \xi^\gamma \\ &= u^\alpha{}_{;\beta} \xi^\beta{}_{;\gamma} u^\gamma + u^\alpha{}_{;\beta\gamma} \xi^\beta u^\gamma - u^\alpha{}_{;\beta} u^\beta{}_{;\gamma} \xi^\gamma - u^\alpha{}_{;\beta\gamma} u^\beta \xi^\gamma \\ &= \left( \xi^\beta{}_{;\gamma} u^\gamma - u^\beta{}_{;\gamma} \xi^\gamma \right) u^\alpha{}_{;\beta} + \left( u^\alpha{}_{;\beta\gamma} - u^\alpha{}_{;\gamma\beta} \right) \xi^\beta u^\gamma \end{aligned}$$

soit

$$\left( \xi^\alpha{}_{;\beta} u^\beta \right)_{;\gamma} u^\gamma = \left( u^\alpha{}_{;\beta\gamma} - u^\alpha{}_{;\gamma\beta} \right) \xi^\beta u^\gamma \quad (5.44)$$

où nous avons renommé des indices muets dans la troisième égalité. Le premier terme entre parenthèse dans la troisième égalité est nul car il correspond à l'expression du commutateur (5.42) en notation indicielle. On voit dans (5.44) que l'accélération relative des deux particules provient de la non-commutativité des doubles gradients dans un espace-temps courbe.

En développant la parenthèse du terme de droite selon (5.25), on voit que tous les termes contenant des dérivées partielles du champ vectoriel s'annulent : le tenseur  $u^\alpha{}_{;\beta\gamma} - u^\alpha{}_{;\gamma\beta}$  ne dépend donc que du point de l'espace-temps auquel il est évalué et non des variations locales du champ vectoriel. On voit de plus dans le développement qu'il est linéaire dans le champ vectoriel, il s'agit donc d'un tenseur de rang 4 auquel on a appliqué le champ vectoriel  $\vec{u}$ . On obtient en effet :

$$u^\alpha{}_{;\beta\gamma} - u^\alpha{}_{;\gamma\beta} = \left( \Gamma^\alpha{}_{\lambda\beta,\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\gamma,\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\gamma} \Gamma^\rho{}_{\lambda\beta} - \Gamma^\alpha{}_{\rho\beta} \Gamma^\rho{}_{\lambda\gamma} \right) u^\lambda \quad (5.45)$$

Il existe donc un tenseur  $\mathbf{R}$  tel que :

$$u^\alpha{}_{;\beta\gamma} - u^\alpha{}_{;\gamma\beta} = -R^\alpha{}_{\lambda\beta\gamma} u^\lambda \quad (5.46)$$

(noter le placement des indices et le choix du signe, qui varient selon les auteurs ; nous adoptons ici les notation de Misner, Thorne et Wheeler). Le tenseur  $\mathbf{R}$  est appelé *tenseur de courbure* ou *tenseur de Riemann*, ses composantes s'écrivent dans une base naturelle, d'après (5.45) :

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\rho\gamma} \Gamma^\rho{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\rho\delta} \Gamma^\rho{}_{\beta\gamma} \quad (5.47)$$

(5.44) peut donc s'écrire de manière géométrique :

$$\vec{\nabla}_{\vec{u}} \vec{\nabla}_{\vec{u}} \vec{\xi} = -\mathbf{R}(\_, \vec{u}, \vec{\xi}, \vec{u}) \Leftrightarrow \left( \xi^\alpha{}_{;\beta} u^\beta \right)_{;\gamma} u^\gamma = -R^\alpha{}_{\lambda\beta\gamma} u^\lambda \xi^\beta u^\gamma \quad (5.48)$$

Cette équation, qui exprime l'accélération relative de deux lignes d'univers de particules tests sous l'effet de la courbure de l'espace-temps, est appelée *équation de déviation des géodésiques*.

Afin d'interpréter cette relation, recommençons l'étude en physique newtonienne. Nous considérons deux particules se mouvant dans l'espace euclidien, dans un potentiel gravitationnel  $\phi(\mathbf{r})$ , avec une vitesse relative initiale nulle. L'accélération d'une particule étant  $\mathbf{a} = -\vec{\nabla}\phi$ , la vitesse relative des particules ne va pas rester nulle : étant en deux points différents de l'espace, elles subissent un champ de gravitation légèrement différent. Leur accélération relative s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_i^A}{dt^2} = a_i^A = -\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(\mathbf{r} = \mathbf{r}^A) \\ \frac{d^2 x_i^B}{dt^2} = a_i^B = -\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(\mathbf{r} = \mathbf{r}^B) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_i^B - a_i^A = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(\mathbf{r} = \mathbf{r}^A) - \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(\mathbf{r} = \mathbf{r}^B) = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j} \xi_j$$

avec  $\xi \equiv \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$  ; soit :

$$\frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j} \xi_j \quad (5.49)$$

au premier ordre. Expression que l'on peut écrire de manière géométrique :

$$\frac{d^2}{dt^2} \xi = -\varepsilon(\_, \xi) \quad (5.50)$$

où  $\varepsilon_{ij} \equiv \partial^2\phi/\partial x_i \partial x_j$  est un tenseur de rang deux appelé « tenseur des forces de marée » car il est responsable des forces de marée exercées par le Soleil et la Lune sur les océans. Afin de pouvoir comparer (5.50) à (5.48), plaçons nous dans le référentiel inertiel local centré sur la particule A : ce référentiel est accéléré par rapport au référentiel précédent avec une accélération  $a_i^A = -\partial\phi/\partial x_i(\mathbf{r}^A)$ , qui varie dans le temps mais qui est homogène spatialement : les dérivées secondes du potentiel gravitationnel ne sont donc pas modifiées par rapport à (5.49).

Revenons maintenant à l'expression relativiste (5.48) : la comparaison avec un résultat newtonien n'est possible qu'à la limite où les vitesses sont négligeables par rapport à la célérité de la lumière, et où les masses sont suffisamment faibles (cette condition sera précisée dans le prochain chapitre). Plaçons nous donc à proximité de la Terre. Comme les vitesses sont faibles, on a  $u^\alpha \approx (1, 0, 0, 0)$ , soit  $\bar{u} \approx d/d\tau \approx d/dt$  où  $t$  est le temps universel newtonien. De plus, les coefficients de la connexion s'annulent à l'origine d'un référentiel inertiel local. (5.48) devient dans cette limite :

$$\frac{d^2}{dt^2} \xi^i = -R^i_{\ 0j0} \xi^j \quad (5.51)$$

On voit donc par comparaison avec l'expression newtonienne que le tenseur de Riemann généralise le tenseur des forces de marées :

$$R^i_{\ 0j0} = \varepsilon_{ij} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j} \quad (\text{limite newtonienne}) \quad (5.52)$$

(5.51) nous confirme la perspicacité d'avoir assimilé la gravitation avec la courbure de l'espace-temps. A proximité d'un astre sphérique de faible masse  $M$ , pour lequel  $\phi = -GM/r$ , on a donc, si l'origine du repère est au centre de l'astre et que l'axe  $z$  pointe vers le point où l'on désire évaluer le tenseur de courbure :

$$\begin{aligned} R^x_{\ 0x0} = R^y_{\ 0y0} = \varepsilon_{xx} = -GM \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \Big|_{x=y=0} &= \frac{GM}{r^3} \\ R^z_{\ 0z0} = \varepsilon_{zz} = -GM \frac{\partial^2}{\partial z^2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \Big|_{x=y=0} &= -\frac{2GM}{r^3} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Ainsi, l'accélération relative est négative dans une direction latérale : les particules se rapprochent, et elle est positive dans la direction radiale : les particules s'éloignent.

Avant de retourner à la physique, consacrons un peu de temps aux propriétés du tenseur de Riemann. On peut tout d'abord montrer que le tenseur de Riemann possède les symétries suivantes :

$$\begin{aligned}
 R_{\beta\alpha\gamma\delta} &= -R_{\alpha\beta\gamma\delta} \\
 R_{\alpha\beta\delta\gamma} &= -R_{\alpha\beta\gamma\delta} \\
 R_{\gamma\delta\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta\gamma\delta} \\
 R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} &= 0
 \end{aligned} \tag{5.54}$$

Il est donc antisymétrique dans ses deux premiers et deux derniers indices, symétrique par échange des deux paires, et satisfait à la nullité de la somme des permutations circulaires sur les trois derniers indices. On peut de plus montrer que ces symétries réduisent le nombre de composantes indépendantes du tenseur de Riemann de 256 à 20, i.e. exactement le nombre de deuxièmes dérivées de la métrique que l'on ne peut pas choisir nulles dans les coordonnées normales de Riemann.

Enfin, le tenseur de courbure vérifie la relation suivante, appelée *identité de Ricci* :

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta;\epsilon} + R_{\alpha\beta\epsilon\gamma;\delta} + R_{\alpha\beta\delta\epsilon;\gamma} = 0 \tag{5.55}$$

(remarquer qu'il s'agit de la même permutation circulaire des trois derniers indices de (5.54)).

Remarquons maintenant que, dans un référentiel inertiel local, les coefficients de la connexion s'annulant à son origine, on a d'après (5.47) :

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \Gamma_{\alpha\beta\delta,\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta\gamma,\delta} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\delta,\beta\gamma} + g_{\beta\gamma,\alpha\delta} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta}) \quad (\text{référentiel inertiel local}) \tag{5.56}$$

Soit, en ordre de grandeur :  $g_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta} \sim \mathcal{L}^2 R_{\alpha\beta\gamma\delta}$

où  $\mathcal{L}$  est la distance mesurée par rapport à l'origine dans le référentiel inertiel local. Par comparaison avec (5.14), on en déduit donc que l'ordre de grandeur du *rayon de courbure de l'espace-temps* est :

$$\mathcal{R} \sim |R_{\alpha\beta\gamma\delta}|^{-1} \sim \sqrt{\frac{c^2 r^3}{GM}} \tag{5.57}$$

où la deuxième égalité est valable à proximité d'un astre de masse faible d'après (5.53). Le facteur  $c$  a été réinséré en demandant à  $\mathcal{R}$  d'avoir la dimension d'une longueur.

*Exemples :*

A la surface de la Terre  $\mathcal{R} \sim 10^{11} \text{ m} \sim 10^7 R_{\text{Terre}}$ , à la « surface » d'un proton  $\mathcal{R} \sim 10^4 \text{ m} \sim 10^{19} R_p$ . Ces objets peuvent donc être étudiés en physique non relativiste sans arrière-pensée.

A la « surface » d'un trou-noir de 10 masses solaires et de « rayon »<sup>2</sup> 30 km  $\mathcal{R} \sim 10^4 \text{ m} \sim R_{\text{TN}}$

La physique relativiste est donc nécessaire pour étudier un tel objet (bien sûr, la compréhension même de son existence nécessite l'utilisation de la relativité générale).

On peut enfin construire d'autres tenseurs par contraction du tenseur de courbure, le plus utilisé étant le tenseur de Ricci, obtenu par contraction du tenseur de Riemann sur ses premier et troisième indice :

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^{\rho}_{\alpha\rho\beta} \tag{5.58}$$

qui est symétrique en vertu des symétries (5.54) et dont l'expression dans une base naturelle est d'après (5.47) :

$$R_{\alpha\beta} = R^{\rho}_{\alpha\rho\beta} = \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta,\rho} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\rho,\beta} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\rho} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\beta} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\rho} \tag{5.59}$$

On définit enfin le scalaire de courbure, obtenu par contraction du tenseur de Ricci :

$$R \equiv R^{\rho}_{\rho} \tag{5.60}$$

<sup>2</sup> voir chapitre 3

5) Exemple de loi physique : rayonnement électromagnétique

Nous avons montré en relativité restreinte (équation (3.47) ) que les équations de Maxwell s'écrivent dans un référentiel inertiel :

$$\begin{cases} F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 4\pi J^\mu \\ F_{\mu\nu}{}_{;\rho} + F_{\rho\mu}{}_{;\nu} + F_{\nu\rho}{}_{;\mu} = 0 \end{cases} \quad (5.61)$$

où  $F(\_,\_)$  est le tenseur du champ électromagnétique ( $F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}$  ;  $\vec{A}$  étant le potentiel vecteur) et  $\vec{J}$  est la densité de courant (noter que les permutations sont les mêmes que dans la relation (5.54)). La deuxième de ces équations dérive directement de la définition du tenseur du champ en fonction du potentiel vecteur. En vertu du principe d'équivalence, les équations (5.61) sont valables dans un référentiel inertiel local et, comme elles sont *locales* et écrites sous forme covariante, elles restent valables dans tout référentiel.

Par contre, figure dans la première équation un double gradient du potentiel vecteur : la plus grande méfiance est donc de mise lorsque l'on veut en dériver une équation d'onde. En effet :

$$A^{\nu}{}_{;\mu\nu} = A^{\nu}{}_{;\nu\mu} - R^{\nu}{}_{\rho\mu\nu} A^{\rho} = A^{\nu}{}_{;\nu\mu} + R_{\rho\mu} A^{\rho}$$

d'après (5.46). La première équation de Maxwell peut donc s'écrire :

$$A_{\nu;\mu}{}^{\nu} - A_{\mu;\nu}{}^{\nu} = A_{\nu}{}^{;\nu}{}_{\mu} + R_{\rho\mu} A^{\rho} - A_{\mu;\nu}{}^{\nu} = 4\pi J_{\mu}$$

En se plaçant en jauge de Lorenz ( $A^{\mu}{}_{;\mu} = 0$ ), on obtient finalement l'équation d'onde :

$$A_{\mu;\nu}{}^{\nu} = R_{\nu\mu} A^{\nu} - 4\pi J_{\mu} \quad (5.62)$$

La présence du double gradient fait donc apparaître un couplage entre le potentiel vecteur et la courbure de l'espace-temps. Ceci est un premier exemple des non-linéarités qui apparaissent en relativité générale, les non-linéarités apparaissent car l'énergie contenue dans le champ électromagnétique courbe l'espace-temps.

Une conséquence du principe d'équivalence est que l'on peut transposer facilement en relativité générale les lois *locales* de la relativité restreinte (i.e. que l'on peut appliquer à l'origine d'une référentiel inertiel).

6) Intégration sur un volume, et ses limites

Au contraire, la conservation globale de l'énergie-impulsion du champ électromagnétique (relativité restreinte, équation (3.97) ) :

$$\iiint [\mathbf{R} + (\rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B})] dV + \oint\oint \mathcal{T} \cdot dS = 0$$

ne sera pas valable en relativité générale. En effet, l'opération sous-entendue par une intégration dans un espace temps plat est de découper l'espace-temps en petits 4-cubes, d'évaluer la valeur du champ vectoriel à évaluer au centre de celui ci, puis de ramener tous ces vecteurs en un même point pour les additionner. Deux problèmes se posent alors en relativité générale. Tout d'abord le point où l'on choisit d'additionner les vecteurs est arbitraire, et la valeur des vecteurs changera d'après le point choisi puisque la métrique y sera différente. Une convention suffirait sans doute à contourner l'obstacle, mais il y a pire puisque, dans un espace-temps courbe, la valeur du vecteur au point d'arrivée dépend du chemin que l'on a choisi de lui faire parcourir pour y arriver !

Retenons donc qu'une loi physique connue en relativité restreinte est transposable trivialement en relativité générale si *i*) elle ne fait pas figurer de double gradient et *ii*) si elle est locale, le point *ii*) étant hautement non trivial.

Il y a cependant certaines quantités que l'on peut intégrer dans un espace-temps courbe, par exemple un élément de volume. En relativité restreinte, on a vu (expression (2.63) ) que l'élément de volume pouvait s'écrire :

$$dV = \epsilon(dt\bar{e}_t, dx\bar{e}_x, dy\bar{e}_y, dz\bar{e}_z) = \epsilon_{txyz} dt.dx.dy.dz = +dt.dx.dy.dz$$

La généralisation pose cependant quelques problèmes car il s'avère que le « tenseur » de Levi-Civita tel qu'on l'a défini n'est pas un tenseur. On le voit simplement en changeant de système de

coordonnées  $\{x^\mu\} \rightarrow \{x'^\mu\}$  et en appliquant la loi de transformation des tenseurs aux composantes de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  : les nouvelles composantes ainsi calculées ne seront évidemment plus 0, +1 ou -1. On peut cependant montrer que, en notant  $g$  le déterminant de la métrique (vue comme une matrice) et

$$[\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4] = +1 \text{ si } \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \text{ est réalisé par un nombre pair de permutations à partir de } 0123$$

$$[\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4] = -1 \text{ si } \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \text{ est réalisé par un nombre impair de permutations à partir de } 0123$$

$$[\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4] = 0 \text{ si tous les indices ne sont pas différents}$$

Les composantes du tenseur de Levi-Civita  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sont :

$$\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = \sqrt{g} [\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4] \quad \varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = \pm \frac{1}{\sqrt{g}} [\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4]$$

où l'on prend pour les composantes contravariantes le signe « - » si un indice temporel apparaît. L'élément de volume s'écrit alors simplement de la même manière qu'en relativité restreinte. Si les coordonnées sont  $\{p, q, r, s\}$  :

$$dV = \boldsymbol{\varepsilon}(dp\vec{e}_p, dq\vec{e}_q, dr\vec{e}_r, ds\vec{e}_s) = \varepsilon_{pqrs} dp.dq.dr.ds \quad (5.63)$$

L'élément de volume de l'espace euclidien s'écrit par exemple en coordonnées sphériques :

$$dV = \boldsymbol{\varepsilon}\left(dr\frac{\partial}{\partial r}, d\theta\frac{\partial}{\partial \theta}, d\phi\frac{\partial}{\partial \phi}\right) = \sqrt{g}.dr.d\theta.d\phi = \sqrt{r^4 \sin^2 \theta} dr.d\theta.d\phi = r^2 \sin \theta dr.d\theta.d\phi \quad (5.64)$$

## IV. EQUATIONS D'EINSTEIN

### 1) Equations du champ

Nous avons vu dans ce chapitre que les effets de la gravitation, en relativité générale, étaient décrits par la géométrie de l'espace-temps. Il est temps de quantifier cette affirmation par une relation liant la géométrie de l'espace-temps (donc la métrique) à son contenu en matière-énergie. Il faudra que les équations du champ de la métrique concordent avec les équations newtoniennes dans leur domaine d'application. Ainsi, nous voulons retrouver en limite newtonienne l'équation du champ de gravitation :

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$$

qui s'écrit, avec les notations introduites dans ce chapitre, le tenseur de courbure généralisant le tenseur des forces de marée :

$$\varepsilon^i{}_i = R^i{}_{0i0} = R_{00} = 4\pi G \rho \quad (5.65)$$

La densité de masse dans le terme de droite n'est autre que la composante temps-temps du tenseur énergie-impulsion à la limite newtonienne, on est donc amené à deviner :

$$R_{\alpha\beta} = 4\pi G T_{\alpha\beta}$$

Cet ensemble de 10 équations pour les 10 composantes du tenseur de Ricci est attrayant, mais a malheureusement un gros défaut : les dix équations étant indépendantes, nous n'avons pas la liberté de changer de système de coordonnées (par exemple pour se placer dans les coordonnées normales). Pour contourner cette difficulté, souvenons-nous que la conservation locale de la matière-énergie implique  $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} = 0$  : si on construit à partir du tenseur de Ricci un tenseur dont la divergence est nulle et que nous l'égalons à  $4\pi G \mathbf{T}$ , quatre des dix équations seront automatiquement satisfaites, et nous aurons donc les 4 degrés de liberté nécessaires à un changement de coordonnées.

Il se trouve que le tenseur suivant, nommé *tenseur d'Einstein*, a la propriété recherchée :

$$G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g^{\alpha\beta} \quad (5.66)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{G} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \quad (5.67)$$

Notons que, en raison des symétries du tenseur de Ricci et de la métrique, le tenseur d'Einstein est symétrique.

Einstein fut alors amené à postuler :

$$\mathbf{G} = \kappa \mathbf{T} \Leftrightarrow G_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta} \quad (5.68)$$

où  $\kappa$  est une constante à déterminer par comparaison à la limite newtonienne. Prenons la trace de (5.68) en utilisant la définition de  $\mathbf{G}$  :

$$R - \frac{1}{2} R \underbrace{g_{\mu\nu} g^{\mu\nu}}_4 = \kappa g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \Rightarrow R = -\kappa g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$$

et réinjectons-la dans l'expression, on obtient :

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\kappa}{2} T_{\alpha\beta} \quad (5.69)$$

Par comparaison avec (5.65), on en déduit donc  $\kappa = 8\pi G$ . Les *équations d'Einstein* s'écrivent donc :

$$\boxed{\mathbf{G} = 8\pi \mathbf{T} \Leftrightarrow G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}} \quad (5.70)$$

où l'on a posé  $G = 1$ , nouvelle addition à notre système d'unités géométriques. Dans le système international,  $[G] = \text{L}^3 \text{M}^{-1} \text{T}^{-2}$ , dans le système géométrisé on a donc l'équivalence :

$$\frac{G}{c^2} = 7,43 \times 10^{-28} \text{ m.kg}^{-1} \Rightarrow 1 \text{ kg} = 7,43 \times 10^{-28} \text{ m} \quad (5.71)$$

Nous réserverons désormais la notation  $G$  pour la trace du tenseur d'Einstein, sauf mention explicite. Nous verrons dans le chapitre suivant comment résoudre les équations d'Einstein dans le cas d'une distribution de masse-énergie à symétrie sphérique.

Dans le vide, les équations d'Einstein s'écrivent simplement, d'après (5.69) :

$$R_{\alpha\beta} = 0 \quad (5.72)$$

## 2) Limite newtonienne

À la limite newtonienne, i.e. lorsque la gravité est faible, la métrique de l'espace-temps doit peu différer de celle de Minkowski. On peut donc l'écrire :

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad \text{avec } |h_{\alpha\beta}| \ll 1 \quad (5.73)$$

De plus, toutes les vitesses doivent être faibles devant  $c$ , i.e. :

$$\left| \frac{u_i}{u_0} \right| \ll 1 \quad \text{et} \quad \left| \frac{T_{\alpha i}}{T_{00}} \right| \ll 1 \quad \text{avec } T_{00} \approx \rho \quad (5.74)$$

les vitesses sont donc telles que :  $u^\alpha = (1, \mathbf{v})$ , où  $\mathbf{v}$  est la 3-vitesse newtonienne. L'équation des géodésiques se réduit donc, au premier ordre non nul, à :

$$\bar{\nabla}_{\bar{i}} \bar{u}^{\bar{i}} = 0 \Rightarrow v^i{}_{,\alpha} u^\alpha + \Gamma^i{}_{\rho 0} u^\rho u^0 = 0 \quad (5.75)$$

avec (on peut au premier ordre élever et abaisser les indices à l'aide de la métrique de Minkowski) :

$$\Gamma^i{}_{\rho 0} = \frac{1}{2} \eta^{i\sigma} (g_{\sigma\rho,0} + g_{0\sigma,\rho} - g_{\rho 0,\sigma}) = -\frac{1}{2} (h^i{}_{\rho,0} + h_0{}^i{}_{,\rho} - h_{\rho 0}{}^i)$$

L'équation des géodésiques devient donc au premier ordre :

$$v^i{}_{,\alpha} u^\alpha + \Gamma^i{}_{00} u^0 u^0 = 0 \Rightarrow v^i{}_{,\alpha} u^\alpha - \frac{1}{2} h_{00}{}^i = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{dv^i}{dt} = \frac{1}{2} h_{00}{}^i$$

où  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$  est la dérivée temporelle suivant un élément de fluide (description d'Euler).

Par comparaison avec l'équation du mouvement newtonienne, on voit que :

$$h_{00} = -2\phi \quad (5.76)$$

La métrique de la limite newtonienne est donc de la forme :

$$ds^2 = -(1 + 2\phi) + (\delta_{jk} + h_{jk}) dx^j dx^k + h_{0j} dx^0 dx^j \quad (5.77)$$

Donc, si l'on trouve une région où la gravitation est faible dans un espace-temps dont on ne connaît que la métrique, un développement limité nous permet d'en trouver le potentiel équivalent à la limite newtonienne.